Київський національний університет імені Тараса Шевченка
Географічний факультет
Кафедра геодезії та картографії

ГОНЧАРЕНКО О.С.

ВИЩА ГЕОДЕЗІЯ

Частина 1. Сфероїдальна геодезія

МОДУЛЬ 1. «ОСНОВИ ВИЩОЇ ГЕОДЕЗІЇ»
МОДУЛЬ 2. «ГЕОМЕТРІЯ ЗЕМНОГО ЕЛІПСОЇДА»

конспект лекцій

Для підготовки фахівців за освітньо-кваліфікаційним рівнем «бакалавр» галузі знань 19 - Архітектура та будівництво, за спеціальністю 193 – геодезія та землеустрій.

Київ - 2022

УДК 528. 23

Укладач: Гончаренко О.С.

Рецензенти:

Кузьмич О. Й., к.т.н., професор кафедри інженерної геодезії Київського національного університету будівництва та архітектури;

Білоус В.В., к.т.н., доцент кафедри геодезії та картографії Київського національного університету імені Тараса Шевченка.

Затверджено вченою радою географічного факультету Київського національного університету імені Тараса Шевченка (Протокол № 8 від 21.02.2022 року).

Вища геодезія. Частина 1. Сфероїдальна геодезія. Модуль 1. «Основи вищої геодезії», модуль 2. «Геометрія земного еліпсоїда». Конспект лекцій.

Укладач: Гончаренко О.С., к.т.н., доцент кафедри геодезії та картографії Київського національного університету ім. Т. Шевченка.

Конспект лекцій складено у відповідності до робочої навчальної програми дисципліни “Вища геодезія” і є складовою освітньо-професійної програми підготовки фахівців за освітньо-кваліфікаційним рівнем «бакалавр» галузі знань 19 - Архітектура та будівництво, за спеціальністю 193 – геодезія та землеустрій.

Може бути корисним магістрантам та аспірантам для підготовки до складання вступних та кандидатських іспитів, а також фахівцям, які займаються питаннями формування та модернізації координатних геодезичних систем загальнодержавного призначення, вирішенням завдань редукування вимірювань на поверхню земного еліпсоїда.

ЗМІСТ

Вступ

Конспект лекцій складено у відповідності до робочої навчальної програми дисципліни "Вища геодезія" і є складовою освітньо-професійної програми підготовки фахівців за освітньо-кваліфікаційним рівнем «бакалавр» галузі знань 19 - Архітектура та будівництво, за спеціальністю 193 – геодезія та землеустрій.

Вивчення курсу "Вища геодезія" висуває задачі по вдосконаленню теоретичної та наукової підготовки студентів геодезичних та картографічних спеціальностей. Впровадження в практику сучасних картографічних та геодезичних робіт геоінформаційних систем та цифрових технологій та наявність потужної комп'ютерної техніки дали новий поштовх теоретичному і практичному розвитку цієї дисципліни, і послужили для подальших розробок новітніх цифрових технологій та їх впровадження в галузі картографії, геодезії та землеустрою. Дисципліна забезпечує закріплення теоретичних знань та формування практичних навичок роботи з використання методів дослідження фігури і побудови моделей Землі, створення сучасних геодезичних референцних систем, використання алгоритмів і програмного забезпечення опрацювання результатів спостережень в глобальних геодезичних системах та баз даних різного цільового призначення, створення глобальних, регіональних та опорних державних геодезичних мереж.

Зміст конспекту лекцій представлено двома розділами «Сфероїдальної геодезії»: «Основи вищої геодезії» та «Геометрія земного еліпсоїда».

Модуль 1. ОСНОВИ ВИЩОЇ ГЕОДЕЗІЇ

Лекція 1. Предмет та задачі вищої геодезії

Вища геодезія вивчає фігуру та зовнішнє гравітаційне поле Землі, методи створення систем геодезичних координат на. всю поверхню Землі або на. окремі її ділянки, а. також способи визначення положення точок земної поверхні в тій чи іншій системі координат.

Фундаментальною теоретично-практичною ***задачею вищої геодезії*** є побудова земної системи геодезичних координат та єдиної моделі зовнішнього гравітаційного поля Землі. Розв'язання цієї задачі здійснюється на основі теоретичних досліджень та математичної обробки результатів наземних астрономічних, геодезичних та гравіметричних вимірювань, супутникових спостережень.

До недавнього часу основним методом побудови геодезичних мереж був метод тріангуляції, який широко застосовувався в геодезичному виробництві. як в нашій країні так і за кордоном. Координати пунктів обчислювались від різних початків і були віднесені до різних відлікових поверхонь, які апроксимували Землю найкращим чином в межах незначних територій. З розвитком інтеграційних процесів, широким впровадженням сучасних систем зв'язку, розробкою глобальних міжнародних науково-практичних проектів роль геодезії і задачі, які вона повинна виконувати, поступово змінюються. Перш за все змінюється сам принцип створення геодезичних мереж. На зміну традиційним геодезичним вимірам, які полягали у вимірюванні горизонтальних напрямів та відстаней між пунктами мережі, прийшли сучасні метода: визначення місцеположення з допомогою спеціальних супутникових систем. При цьому значно зросла точність визначення координат, оперативність їх отримання, а також можливість визначення їх в глобальній (загальноземній) системі координат.

Встановлення залежностей між результатами астрономо-геодезичних, гравіметричних та супутникових вимірювань і величинами, що визначають фігуру та зовнішнє гравітаційне поле Землі, складає одну із задач ***теоретичної геодезії**,* як складової вищої геодезії.

В ***сфероїдальній геодезії*** вивчаються перш за все методи визначення взаємного положення точок, розташованих як на поверхні земного еліпсоїда так і над цією поверхнею - вихідною координатною поверхнею.

Відомо, що класичні геодезичні вимірювання проводяться на земній поверхні і зв'язані з прямовисними лініями, і, відповідно, з рівневою поверхнею.

Рівневою поверхнею називають поверхню, у всіх точках якої нормалі до неї збігаються з прямовисними лініями. ***Прямовисна лінія*** - це пряма, що збігається з напрямом дії сили ваги в даній точці.

Рівневих поверхонь можна побудувати нескінченну множину. Серед них виділяють одну, яка збігається з незбуреною припливами і хвилями водною поверхнею Світового океану. Якщо цю поверхню продовжити під материками так, щоб вона всюди залишалась нормальною до напряму прямовисних ліній, то отримаємо замкнуту поверхню, яка дістала назву ***геоїда.***

Поверхня геоїда не може бути представлена одним рівнянням в кінцевому виді, із-за чого для розв'язування основних задач вищої геодезії вибирають допоміжну поверхню, з одного боку, просту і достатньо добре вивчену в математичному плані і, з другого боку, і можливо близьку до поверхні геоїда. Ці умови добре задовольняє належно підібраний ***еліпсоїд обертання.*** Називають такий еліпсоїд земним еліпсоїдом або земним ***сфероїдом***.

Отже, при розв'язуванні основних задач астрономо-геодезичної і картографічної практики земну поверхню заміняють поверхнею еліпсоїда обертання або сфероїда і однією із задач вищої геодезії є вивчення геометрії поверхні еліпсоїда обертання, що складає предмет сфероїдальної геодезії.

Безпосередні виміри, пов'язані з напрямами прямовисних ліній, приводяться (редукуються) на поверхню еліпсоїда. Щодо кутових вимірювань, то це означає, перш за все, введення поправок за відхилення прямовисних ліній. ***Відхилення прямовисних ліній*** -це кут між прямовисною лінією і нормаллю до поверхні земного еліпсоїда в даній точці.

Питання редукцій відмірювань, тісно пов'язані з задачею вивчення фігури Землі, встановлення розмірів земного еліпсоїда та його орієнтування відносно поверхні геоїда, розглядаються в ***теоретичній геодезії.*** При вивченні всіх питань сфероїдальної геодезії допускається, що результати геодезичних вимірювань вже приведені на поверхню еліпсоїда.

Розміри еліпсоїда характеризуються величинами його великої півосі і полярного стиснення, а положення його в тілі Землі переважно визначається складовими відхилення прямовисної лінії в площинах меридіана і першого вертикалу та висотою геоїда в якій-небудь одній точці, яка є проекцією відповідного пункту геодезичної мережі і приймається за вихідний пункт геодезичних вимірювань. При цьому напрям прямовисної лінії у вихідному пункті встановлюється шляхом астрономічних визначень його широти і довготи, а також і азимута напряму з нього на суміжний пункт. Шляхом же виправлення астрономічної широти і довготи вихідного пункту та астрономічного азимута вибраного напряму в цьому пункті. за відхилення прямовисної лінії в тому ж пункті визначаються його геодезична широта і довгота та геодезичний азимут того ж напряму, які разом з заданою висотою геоїда у вихідному пункті служать ***вихідними геодезичними датами***, для опрацювання геодезичних вимірювань на поверхні прийнятого еліпсоїда.

Методи визначення положення точок на поверхні еліпсоїда, на фізичній поверхні Землі чи в навколоземному просторі в системі просторових координат складають основну частину предмету сфероїдальної геодезії.

При створенні топографічних карт, розв'язуванні багатьох практичних задач інженерного характеру суттєве спрощення робіт дає використання системи плоских прямокутних координат. Пошук картографічного зображення поверхні еліпсоїда на площину і встановлення системи плоских координат теж є предметом досліджень сфероїдальної геодезії.

Отже, в ***сфероїдальній геодезії*** вивчають геометричні методи визначення взаємного положення точок земної поверхні та навколоземного простору, в яких за вихідну координатну поверхню прийнята поверхня земного еліпсоїда, а виміряні величини, що використовуються в цих методах, вільні від впливу відхилень прямовисних ліній. Методи вивчення фігури та зовнішнього гравітаційного поля Землі, параметри редукцій наземних астрономо-геодезичних вимірювань в єдину систему відліку - головні питання вивчення в ***теоретичній геодезії***.

Контрольні запитання

1. Предмет та задачі вищої геодезії.
2. Дати визначення рівневої поверхні.
3. Дати визначення прямовисної лінії.
4. Дати визначення геоїда.
5. Які питання розглядаються в теоретичній геодезії.
6. Методи сфероїдальної геодезії.

Лекція 2. Фігура Землі. Математичні та фізичні моделі Землі

Класично, координати точок отримують із астрономо-геодезичних вимірювань. Як відомо, при цих вимірюваннях вісь геодезичного (чи астрономічного) приладу орієнтують відносно прямовисної лінії. Але оскільки величина і напрям сили ваги в кожній точці пов'язані з обертанням Землі навколо своєї осі та розподілом мас в тілі Землі, що має досить складний характер, встановлення форми Землі стає неможливим без вивчення поля земного тяжіння, тобто гравітаційного поля Землі.

Початком вивчення фігури Землі щодо її виду та розмірів було наукове обґрунтування погляду про її кулеподібність. Імена Піфагора, Арістотеля, Архімеда, Ератосфена та інших учених і філософів стародавньої Греції і Єгипту навічно залишились в пам'яті людства, як першопроходьців вчення про фігуру Землі. Вже перші практичні визначення розмірів Землі базувалися на принципіально правильному геометричному методі, розробленому стародавніми математиками та астрономами, що полягав у вимірюванні деякої дуги меридіана та визначенні відповідного їй кута в центрі земної кулі, тобто різниці широт кінцевих точок цієї дуги. За цими вимірюваннями визначалася довжина дуги меридіана в один градус або довжина всього кола земної кулі. Звідси виник принцип вимірювання довжини дуги градуса меридіана або принцип ***градусного вимірювання***, на якому були засновані всі подальші методи дослідження фігури Землі щодо її виду та розмірів.

В перших і подальших визначеннях розмірів Землі найбільш слабким місцем досліджень було вимірювання лінійної довжини дуги меридіана. Тодішня техніка вимірювання дозволяла вимірювати тільки короткі дуги меридіана, що в свою чергу при навіть незначних похибках у визначенні відповідного цій дузі центрального кута викликало значну похибку в довжині градуса меридіана та величині, земного радіуса. Із застосуванням методу тріангуляції з'явилась принципова можливість визначати дуги меридіанів та паралелей будь-якої довжини з високою точністю.

Градусні вимірювання Пікара (1670 р.) остаточно закріпили перше правильне і науково обґрунтоване представлення про кулеподібність Землі. В той же час в областях фізики, механіки, астрономії нагромадились нові факти, які вимагали узагальнення. Наукове пояснення цих фактів привело до обґрунтування нового вчення про фігуру Землі.

Теоретично встановив сплюснутість фігури Землі в напрямі її полюсів Ньютон (1687 р.). Він, на основі закону всесвітнього тяжіння, прийшов до висновку, що фігура планети при не дуже швидкому обертанні повинна прийняти форму *сфероїда* або в простішому вилажу *еліпсоїда обертання з* незначним стисненням. Величина цього стиснення, за розрахунками Ньютона при умові, що Земля складається із однорідної ідеальної рідини, склала 1:230. Разом з тим він розглядав і зміну форми фігури планети в залежності від зміни її розмірів, густини маси та швидкості обертання навколо своєї осі. Тим самим ним було вказано, що дослідження фігури Землі щодо її виду та розмірів є не тільки геометричною задачею, але пов'язано із вивченням її генезису, внутрішньої будови і умов обертання навколо своєї осі.

Цілий ряд геодезичних експедицій в різних широтах (1718, 1737, 1742 р.р.), а також теоретичні дослідження французького математика Клеро (1743 р.) практично і теоретично підтвердили обґрунтованість ідеї про сфероїдальністіть Землі. Дослідження Клеро підтвердили, що фігура Землі зв'язана з її внутрішньою будовою і фізичним станом й маси. Він вказав на можливість визначення величини стиснення земного сфероїда, якщо задані розміри, швидкість обертання і внутрішня будова Землі. Клеро розширив доказ Ньютона про те, що фігурою рівноваги однорідної ідеальної рідини, що обертається, буде еліпсоїд обертання малого стиснення.

В своїх дослідженнях Клеро обґрунтував і загальний закон розподілу величин прискорення сили ваги на поверхні земного сфероїда. Він встановив зв'язок між стисненням земного сфероїда та розподілом сили ваги на його поверхні. Відповідні рівняння або теореми Клеро є теоретичною основою виводу стиснення фігури Землі за вимірюванням сили ваги на її поверхні.

На початку XIX ст. в багатьох країнах почали розвиватися астрономо-геодезичні робота з метою складання точних карт. При виконанні цих робіт приймалась до уваги і задача визначення розмірів Землі в новій її постановці.

Необхідно відмітити, що постановка задачі виводу розмірів земного еліпсоїда перш за все вимагала встановлення відповідного поняття або представлення про фігуру Землі, оскільки її фізична поверхня, що складається із поверхні материків та океанів, має значні "неправильності". Зрозуміло, що фізична поверхня Землі в межах материків з їх відносними підвищеннями та пониженнями не є поверхнею еліпсоїда обертання і не може бути виражена яким-небудь математичним рівнянням. Звідси виникла задача встановлення поняття і певного підбору математичної поверхні Землі.

Фізична поверхня Землі складається переважно із поверхні морів та океанів, зв'язаних між собою, що утворюють єдину водну масу - Світовий океан. Поверхня води Світового океану, як рідкої маси, що знаходиться тільки під дією сили земного притягання та відцентрової сили обертання Землі, є однією із рівневих поверхонь потенціалу сили ваги. Вона характеризується тією основною властивістю, що на ній потенціал прискорення сили ваги має повсюди одне і теж постійне значення, тобто в кожній її точці напрям нормалі до неї збігається з напрямом дії сили ваги або з прямовисною лінією. Якщо рівневу поверхню Світового океану продовжити під материками таким чином, щоб вона всюди перетинала напрям прямовисної лінії під прямим кутом, то тоді вийде деяка замкнута поверхня, яка і буде характеризувати математичну фігуру Землі.

Вказану основну властивість будь-якої рівневої поверхні можна виразити математичним рівнянням, представляючи відповідний її потенціал сили ваги функцією від координат її поточної точки та розподілу маси всередині Землі. В такому плані рівнева поверхня, що збігається з поверхнею Світового океану в стані рівноваги і відповідним чином продовжена під материками, є математичною поверхнею. Проте вид, або форма цієї поверхні залежить від розподілу сили ваги на ній або внутрішньої будови Землі.

В 1849 р. була опублікована робота відомого англійського математика Стокса, який вслід за Ньютоном і Клеро зробив значне узагальнення теорії про фігуру Землі. Зокрема, він поставив задачу- знайти рівневу поверхню, що повністю охоплює маси, за відомим силовим полем - і побудував формулу, що дає її розв'язок для випадку Землі малого стиснення, близької до еліпсоїда обертання.

Фізична поверхня Землі має дуже складну форму із-за сукупності різноманітних форм рельєфу і не може в цілому бути представлена точно якою небудь правильною математичною фігурою. В 1873 р. Лістингом (J. Listing) було запропоновано вважати математичною фігурою Землі тіло, поверхня якого збігається із середнім рівнем води в морях та океанах і є рівневою. Така фігура дістала назву *геоїда.* Стандартизований термін геоїд -це фігура Землі, утворена рівневою поверхнею, що збігається з поверхнею Світового океану в стані цілковитого спокою та рівноваги, відповідно продовжена під материками (щоб напрями прямовисних ліній перетинали цю поверхню у всіх її точках під прямим кутом).

В приведеному вище понятті про геоїд є певна невизначеність, зв'язана з невизначеністю поняття про стан цілковитого спокою та рівноваги Світового океану. В дійсності Світовий океан знаходиться в стані безперервного руху, що постійно відхиляє його фізичну поверхню від деякої рівневої поверхні. Проте дані спостережень показують, що різниці середніх рівнів океанів і морів порівняно незначні (1-1.5 м) і при дослідженні фігури Землі щодо форми та розмірів невизначеність середнього рівня Світового океану не має особливого значення.

Отже, фігура геоїда є свого роду узагальненою або згладженою фігурою дійсної Землі. Форму фігури геоїда можна визначити за результатами вимірювання сили ваги. Іншими даними для дослідження фігури геоїда є астрономічні спостереження, що дають напрям дії сили ваги або прямовисної лінії в точках спостереження, та геодезичні вимірювання, що визначають взаємне положення цих точок в деякій системі координат. Ці вимірювання, що називаються ще градусними вимірюваннями, а також сучасні методи визначення місцеположення за допомогою супутникових систем дозволяють вирішувати задачу дослідження фігури геоїда.

Вивчення фігури геоїда щодо його виду та розмірів полягає у співставленні його з відомою фігурою порівняння. В цьому плані задачу вивчення фігури геоїда можна розділити на дві частини, котрі між собою тісно пов'язані і котрі тим не менше допустимо розглядати і розв'язувати окремо. В першу частину цієї задачі входить визначення виду і розмірів тієї фігури порівняння - аналітичної поверхні, яка правильно представляє загальну фігуру Землі в цілому, друга частина її полягає у визначенні залишкових відступів геоїда від вказаної фігури порівняння. Визначенням аналітичної поверхні за даними супутникових, астрономо-геодезичних і гравіметричних спостережень займається вища геодезія, а визначенням відхилень геоїда від знайденої поверхні - гравіметрія.

Можливість визначення відхилень геоїда від вибраної фігури порівняння починається з теоретичних робіт Стокса. Пізніше цілий ряд вчених розвинули теорію Стокса. Однією з основних передумов дослідження фігури геоїда та визначення елементів, що характеризують її земний еліпсоїд є необхідність проводити градусні вимірювання і вимірювання сили ваги безпосередньо на поверхні геоїда. Оскільки в дійсності ці вимірювання в межах суші проводяться на фізичній поверхні Землі, то звідси випливає задача приведення їх результатів до поверхні геоїда. Цю задачу називають ще *редукційною*. Для розв'язування цієї задачі в строгій постановці необхідно знати розподіл сили ваги або розподіл густин всередині маси Землі (вище поверхні геоїда) тобто аналітичне продовження аномалій сили ваги від фізичної поверхні до поверхні геоїда. В загальному випадку густина мас над геоїдом є апріорі невідомою тому і виникають значні труднощі точного приведення результатів вимірювань до поверхні геоїда, а також труднощі дослідження фігури геоїда за цими вимірюваннями.

Альтернативне поняття фігури Землі у виді фізичної поверхні було введене Брунсом (1878 р.), але тільки Молоденським (1945 р.) розвинута теорія визначення безпосередньо фізичної поверхні Землі. Він показав, що фігура Землі щодо її виду та розмірів може бути визначена на основі тільки тих даних, які отримують із вимірювань на її фізичній поверхні.

Вивчення фігури фізичної поверхні Землі також пов'язано з її узагальненням або згладжуванням шляхом виділення із неї відповідної "неправильної" або топографічної частини. Для цього Молоденський запропонував деяку допоміжну поверхню, дуже близьку до поверхні геоїда і названу ним *квазігеоїдом.* Визначення фігури квазігеоїда щодо її виду та розмірів за результатами вимірювань на фізичній поверхні Землі також базується на порівнянні її з відомою аналітичною поверхнею - земним еліпсоїдом.

При виведенні розмірів земного еліпсоїда практично можна не враховувати різницю між геоїдом та квазігеоїдом, оскільки вона (1-2 м) не може мати великого значення при сучасній точності досліджень.

Отже, існують в основному три різні можливі поняття "фігура Землі":

а) фізична або дійсна Земля - тверда і рідка частини Землі. Вона є надзвичайно нерегулярною навіть після деякого згладження. Згладжена поверхня піддається математичному опису після деякого усереднення в часі (геодинамічні ефекти);

б) геоїд чи квазігеоїд;

в) Нормальна Земля або модель Землі.

Найбільш простою математичною моделлю є еліпсоїд обертання - двоосний еліпсоїд; його інтенсивно використовують в практиці. В теоретичних дослідженнях застосовують також трьохосний еліпсоїд.

Фізичною моделлю Землі є гідростатична фігура рівноваги. Вона близька до еліпсоїдів, але не точно збігається з ними. Фізична модель Землі базуються на моделі внутрішньої будови і має застосування перш за все в геофізиці, хоча на сучасному етапі розвитку геодезії вона все більше виходить на передній план. На даний час найбільш широко використовуються моделі

PREM (Preliminary Reference Earth Model). В вищій геодезії практично не роблять різниці між фігурою фізичною і поверхнею, що обмежує цю фігуру. Головна умова для Нормальної Землі або фігури порівняння - вона повинна найкращим чином представляти фігуру Землі як в геометричному плані так і в гравітаційному.

Геоїд за формою близький до сфероїда (тіло обертання близьке до кулі) з малим полярним стисненням і, зокрема, до найпростішого із сфероїдів - еліпсоїда обертання.

Земний сфероїд - це фігура, яку б прийняла Земля як пружно-в'язка планетарна маса, що знаходиться в стані гідростатичної рівноваги і під впливом тільки сил взаємного тяжіння її частинок і відцентрової сили її обертання навколо незмінної осі.

Земний еліпсоїд - це еліпсоїд, що характеризує фігуру та розміри Землі.

Еліпсоїд, що найбільш близько підходить до фігури Землі в цілому і центр якого збігається з центром мас Землі, називається *загальним земним еліпсоїдом,* а еліпсоїд, що найбільш близько підходить до поверхні геоїда на певній території (в межах держави, регіону чи континенту) і центр якого хоч і близько підходить, але не збігається з центром мас Землі називається ***референц-еліпсоїдом***.

Отже, референц-еліпсоїд - це земний еліпсоїд, вісь якого паралельна **осі** загальноземного еліпсоїда, який найкращим чином характеризує частину земної поверхні, взятий для опрацювання геодезичних вимірів та встановлення системи геодезичних координат.

Контрольні запитання

1. Поясніть принцип «градусного вимірювання».
2. Сутність редукційної задачі.
3. Дати визначення земного сфероїда.
4. Дати визначення земного еліпсоїда.
5. Дати визначення референц-еліпсоїда.

Лекція 3. Системи координат, що застосовуються у вищій геодезії

Системи координат, що застосовуються в сучасній геодезії, можна розділити на групи: *прямокутні* (двовимірні - на площині, тривимірні - в просторі); *сферичні* (двовимірні - на сфері, тривимірні - в просторі), *еліпсоїдальні* (двовимірні -на поверхні еліпсоїда, тривимірні - в просторі) тощо. Прямокутні координати - двовимірні на площині - можуть бути *полярними координатами на площині,* а сферичні координати деколи називають *полярними координатами в просторі.* Вони можуть відрізнятися за формою, що задається, і бути: прямокутними і криволінійними. Але принципові відмінності систем координат обумовлюються вибором початку, основної координатної площини та головної осі координат.

Система координат, початок якої знаходиться в центрі мас Землі або близько нього, називається *геоцентричною* та *квазігеоцентричною* відповідно. Звідси, координати, зв'язані з загальноземним еліпсоїдом, будуть загальноземними і геоцентричними, а координати, зв'язані з вибраним референц-еліпсоїдом, - референцними і квазігеоцентричними. Якщо ж початок координат збігається з пунктом спостереження на земній поверхні (топоцентром), то систему координат називають *топоцентричною.*

В залежності від вибраної основної координатної площини розрізняють *екваторіальну* (екватор або площина, паралельна екватору), *екліптичну* (площина екліптики), *горизонтну* (площина місцевого горизонту) та *орбітальну* (площина орбіти небесного об'єкта) системи координат.

І, в залежності від вибраного напряму осей координат відносно точок простору, системи координат поділяють на: *зоряні,* якщо вони зорієнтовані за далекими зорями, *квазарні,* якщо вони зорієнтовані за далекими природніми радіоджерелами (квазарами); *земні,* якщо вони зорієнтовані за нерухомими точками на земній поверхні.

Напрями осей вибраної системи координат в просторі можуть бути задані відносно характерних точок небесної сфери або земної поверхні. У відповідності з цим слід розрізняти системи координат, що не обертаються і що обертаються разом із Землею.

В геодезії широке застосування мають особливі системи зв'язаних з Землею координат, основні координатні площини та головні осі яких збігаються відповідно з площиною земного екватора і віссю обертання Землі, або є паралельними до них. В одній із цих систем координат положення точки земної поверхні характеризується компонентами напряму прямовисної лінії в цій точці відносно координатних площин або нерухомих зірок. Оскільки положення точки земної поверхні в цій системі координат, що обертається разом з Землею, може бути визначане безпосередньо із астрономічних спостережень в цій точці, то ця сама система координат називається *астрономічною.*

Отже, астрономічні координати - компоненти напряму прямовисної лінії в даній точці простору відносно площини перпендикулярної до осі обертання Землі та площини початкового астрономічного меридіана.

Фігура Землі, як було сказано вище, в загальному має сфероїдальний вид, то для побудови другої системи координат вона замінюється деяким еліпсоїдом обертання з відомими розмірами та заданим положенням в тілі Землі. Положення точок земної поверхні характеризується компонентами напрямів нормалей до поверхні прийнятого еліпсоїда в цих точках та їх висотами над поверхнею цього еліпсоїда. Оскільки згадувані характеристики положення точок в цій системі координат визначаються за результатами геодезичних спостережень, то сама система називається *геодезичною*.

Астрономічна і геодезична системи координат можуть бути задані у вигляді як прямолінійних прямокутних, так і еліпсоїдальних координат.

При заданні геодезичних координат в еліпсоїдальному виді паралелі та меридіани приймають за систему ортогональних координатних ліній на еліпсоїді, а за координати приймають кутові величини. Приймемо один з меридіанів за початковий. Тоді положення будь-якого другого меридіана буде визначатися двогранним кутом, утвореним площинами початкового та даного меридіанів. Цей кут має одну і ту ж величину для всіх точок даного меридіана і, відповідно, може бути прийнятий за координату для меридіана. Він позначається буквою L і називається *геодезичною довготою.*

Довготи, що відраховуються від площини початкового меридіана на схід (проти руху годинникової стрілки) в межах від 0 до +180° називаються східними довготами, а на захід в межах від 0 до -180° -- західними довготами.

Отже, меридіан є координатна лінія, у всіх точках якої геодезична довгота має одну і ту ж величину ($L=const$). Відмітимо, що площина геодезичного меридіана проходить через нормаль до поверхні еліпсоїда Q_0 і вісь обертання еліпсоїда POP_1 (рис. 1.). 'Тобто, геодезичний меридіан - слід перерізу земного еліпсоїда площиною, що проходить через нормаль до поверхні земного еліпсоїда в даній точці і його малу вісь.

Внаслідок симетричності поверхні еліпсоїда відносно меридіана пряма Qn буде перпендикулярна одночасно до дотичної до меридіана і до дотичної до паралелі**,** відповідно вона перпендикулярна до дотичної площини в точці Q_0.

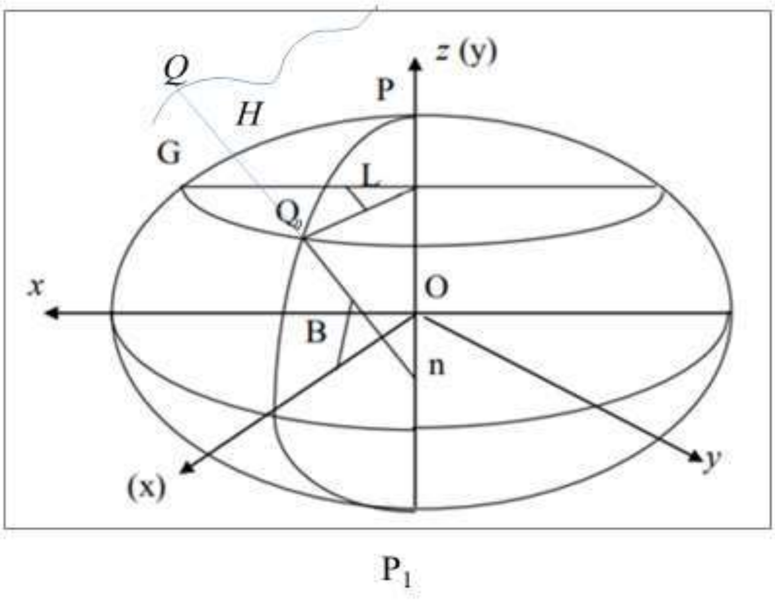


Рис. 1.1 Система геодезичних координат

Гострий кут, утворений нормаллю до поверхні еліпсоїда і площиною екватора, називається *геодезичною широтою* і позначається буквою *B*.

Геодезична широта відраховується від площини екватора в межах від 0 до ±90°.Отже**,** паралель є координатна лінія, у всіх точках якої геодезична широта має одне і теж значення *B=const.*

Система геодезичних координат *B* і *L* представляє собою основну систему координат, яка дозволяє однозначно визначати положення будь-якої точки на поверхні еліпсоїда.

Положення точки *Q* (Q_0 є її проекцією) відносно поверхні еліпсоїда (див. рис. 1.1) визначається *геодезичною висотою H.* Відрізок нормалі QQ_0 називається геодезичною висотою. Геодезична висота відраховується від поверхні земного еліпсоїда в напрямку збільшення висот.

Оскільки геодезичні координати *B, L, H* прив'язані до поверхні еліпсоїда, то їх. ще називають еліпсоїдальними координатами.

Система геодезичних координат також може бути задана у виді просторових прямокутних координат *X, Y, Z,* початок якої суміщений з центром *O* еліпсоїда і основною площиною яких *(XOY)* служить площина його екватора. За координатну вісь *X* приймається лінія перетину площин екватора еліпсоїда та відповідним чином вибраного геодезичного початкового меридіана, вісь *Y* розташована в площині екватора під кутом 90° від початкового меридіана і вісь *Z* направлена на північ вздовж малої осі *OP* еліпсоїда. Положення початкового геодезичного меридіана відносно початкового астрономічного меридіана залежить від умов орієнтування еліпсоїда в тілі Землі.

Геоцентрична екваторіальна система координат приймає участь в добовому русі Землі та є нерухомою відносно точок земної поверхні**.**

Геодезичні координати пунктів земної поверхні можуть бути задані також в проекції еліпсоїда на площину, тобто плоскими прямокутними координатами *xy.* В основі системи плоских прямокутних координат Гауса-Крюгера лежить проекція, яку розробив німецький вчений К. Гаус (1825-30 р.р.) і для якої австрійський геодезист Л. Крюгер (1912 р.) дав робочі формули, довівши проекцію до практичного застосування. Це рівнокутна (конформна) поперечно-циліндрична проекція, яка застосовується для зображення поверхні еліпсоїда на площині.

Якщо будь-яка точка на еліпсоїді, наприклад пункт геодезичної мережі, має координати *B* і *L,* то, використовуючи властивості проекції, можна за цими даними визначити для цієї точки плоскі прямокутні координати *x і y* та навпаки.

Системи просторових еліпсоїдальних координат *B, L, H,* просторових прямокутних координат *X, У, Z,* а також плоских прямокутних координат *x, y* складають геодезичну систему координат. В класичній геодезичній літературі, під суто геодезичними, традиційно вважається система еліпсоїдальних координат *B, L,* що склалася як першооснова геодезичної системи координат.

Геодезична система координат знаходить широке застосування в теоретичних дослідженнях та практичних роботах в геодезії, топографії і картографії, оскільки вона об'єднує дані геодезії, топографічних знімань і картографування всієї поверхні Землі. Вона визначається також положенням центра мас, осі обертання та екватора Землі, а також нормаллю до земного еліпсоїда, що є надзвичайно зручним для вивчення фізичної фігури Землі і геоїда відносно земного еліпсоїда, визначення висот та розв'язку інших наукових і практичних задач.

Контрольні запитання

1. Класифікація систем координат в геодезії.
2. Сутність прямокутної просторової еліпсоїдальної системи координат.
3. Сутність геодезичної системи координат.
4. Сутність астрономічної системи координат.
5. Топоцентрична система координат.
6. Геоцентрична система координат.
7. Дати визначення геодезичної широти точки.
8. Дати визначення геодезичної довготи точки.

Лекція 4. Основи теорії поверхонь

Геометрію земного еліпсоїда можна розглядати як один із спеціальних розділів теорії поверхонь. Теорію поверхонь слід розглядати із двох сторін: внутрішньої геометрії поверхні та зовнішньої геометрії. З позиції першої розглядаються властивості, інваріантні відносно викривлення поверхні, а з другої - властивості, інваріантні відносно групи рухів в просторі. Однією з основних задач сфероїдальної геодезії є вивчення внутрішньої геометрії поверхні земного еліпсоїда.

Сукупність таких властивостей поверхні та фігур на ній, які не змінюються при викривленні поверхні, називається *внутрішньою геометрією поверхні.*

Викривленням називається таке перетворення поверхні, при якому довжини всіх ліній, що лежать на цій поверхні, зберігаються.

Накладення однієї поверхні на другу після викривлення називається *розгортанням* першої поверхні на другу.

Основні визначення, що відносяться до кривих.

Плоскі криві

Рівняння кривої можна задати в загальному виді $F(x,y)=0$, в явному виді: $y=f(x)$, в параметричному виді $x=x(u)$, $y=y(u)$, де u - параметр. В залежності від виду заданої кривої диференціал дуги знаходять із виразів:

$$ds = \sqrt{1+y'^2}dx \text{ , де } y = f(x); \qquad (1.1)$$

$$ds = \sqrt{x'^2 + y'^2}du \text{ , де } x = x(u); y = y(u).$$

Кривиною K плоскої кривої в даній точці Q називається границя відношення кута між дотичними в двох суміжних точках Q_1 і Q_2 до дуги кривої між цими точками при зменшенні дуги до нескінченно малих розмірів.

Радіусом кривини R вданій точці називається величина, обернена кривині $R = \frac{1}{K}$.

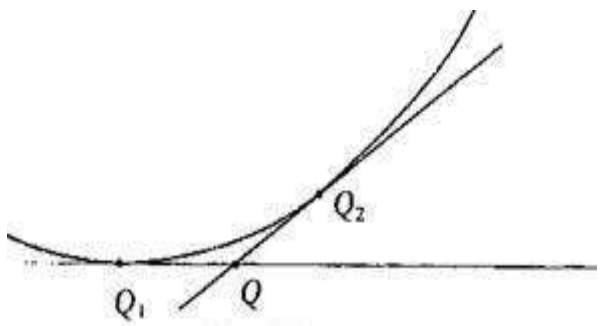


Рис. 1.2 Плоска крива

Кривина та радіус кривини плоскої кривої визначаються за формулами:

$$K = \frac{|y''|}{(1+y'^2)^{3/2}} \qquad (1.2)$$

$$R = \frac{(1+y'^2)^{3/2}}{|y''|}, \text{ де } y = f(x); \quad (1.3)$$

Та $K = \frac{|x'y'' - y'x''|}{(x'^2 + y'^2)^{3/2}}$,

$R = \frac{(x'^2 + y'^2)^{3/2}}{|x'y'' - y'x''|}$, , де $x = x(u); y = y(u)$.

Просторові криві.

Рівняння просторової кривої в параметричному виді

x=x(u), y=y(u), $z = z(u)$, де u - параметр.

Диференціал дуги просторової кривої

$$ds = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}\,du.$$

В кожній точці *М* просторової кривої визначаються три прямі і три площини, що взаємно перетинаються в т. *М* під прямими кутами (рис. 1.3).

Прямі. Дотична, що є граничним положенням січної. Головна нормаль - перетин нормальної і стичної площин, *бінормаль*- пряма, перпендикулярна до стичної площини.

Площини. Нормальна площина - площина, перпендикулярна до дотичної. *Стична площина*—граничне положення площини, що проходить через три близькі точки кривої (Рис. 1.3). *Спрямна площина* - площина, що містить дотичну і бінормаль.

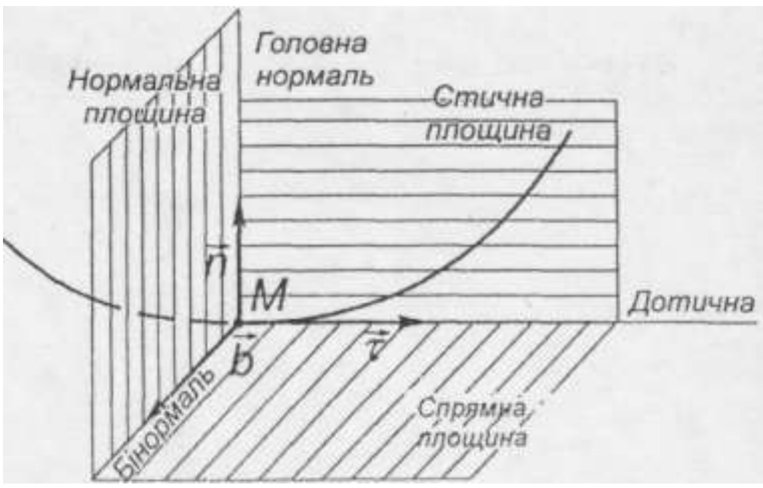


Рис. 1.3 Прямі та площини просторової кривої

Кривиною просторової кривої в даній точці називається числова характеристика відхилення кривої від прямої лінії в області даної точки кривої, її обчислюють за формулою

$$K = \sqrt{x''^2 + y''^2 + z''^2},.$$

$$R = \frac{1}{K}$$

Крученням просторової кривої в даній точці називається числова характеристика відхилення просторової кривої від плоскої кривої в області даної точки.

Поверхні. Рівняння поверхні задається наступними формами;

F(x, y, z)=0 - неявна

z = f(x, y) - явна

x=x(u, v), y=y(u, v), z=z(u, v) -параметрична.

Диференціал дуги або лінійний елемент поверхні

$$ds^2 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2, \tag{1.4}$$

$$E = \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2,\ F = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v},$$

$$G = \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2.$$

Праву частину рівняння (1.4) називають *першою квадратичною формою поверхні.* Коефіцієнти *E, F, G*, що є функціями координат *u* та *v*, залежать тільки від положення: точки на поверхні. Через дані коефіцієнти можна виразити також кут між кривими та площі фігур, тобто перша квадратична форма визначає метрику поверхні. При вигинанні поверхні без розтягів та розривів її рівняння звичайно змінюється, але метрика залишиться тією ж, тобто <u>перша квадратична форма при вигинанні поверхні зберігається.</u>

В сфероїдальній геодезії застосовується ортогональна система криволінійних параметричних координат, які утворюють на поверхні прямокутну сітку координат. В такому випадку рівняння (1.4) прийме наступний вид:

$$ds^2 = Edu^2 + Gdv^2. \tag{1.5}$$

Позначивши $\sqrt{\frac{E}{G}}du = dt,$ отримаєм

$$ds^2 = G(dt^2 + dv^2).(1.6)$$

Криволінійні координати *(t,v)* називаються *ізометричними координатами.*

Важливе значення у сфероїдальній геодезії мають *нормальні перерізи.* Вони отримуються від перетину поверхні площиною, що проходить через нормаль поверхні. Такі. площини, як було вже вище сказано, називаються ***нормальними***.

В теорії поверхонь доказується, що всі криві на поверхні, які проходять через задану точку в одному і тому ж напрямі (тобто які мають спільну дотичну) і які мають спільну стичну площину, мають в цій точці однакову кривину K . Відповідно, кривина довільної кривої рівна, кривині плоского перерізу, що є слідом перетину поверхні стичною площиною даної кривої.

Якщо позначити радіус кривини кривої, у якої головна нормаль збігається з нормаллю до поверхні через й R_0 , тоді радіус кривини якої завгодно кривої на поверхні буде визначатися згідно формули:

$$R = R_0 \cos v,(1.7)$$

де v - кут, утворений головною нормаллю кривої та нормаллю до поверхні. Формула (1.7) виражає відому теорему Меньє:

Радіус кривини якої завгодно кривої на поверхні рівний радіусу кривини нормального перерізу ,що має з нею спільну дотичну, помноженому на косинус кута між нормаллю до поверхні та головною нормаллю кривої.

Величина $\frac{1}{R_0}$ називається ще *нормальною кривиною.* Для її визначення служить наступна формула:

$$\frac{1}{R_0} = \frac{Ddu^2 + 2D'dudv + D''dv^2}{Edu^2 + Gdv^2}.(1.8)$$

Вираз, що знаходиться в чисельнику, називається *другою квадратичною формою поверхні.* Величини *D, D',D''* називаються коефіцієнтами другої квадратичної форми.

Через кожну точку поверхні можна провести цілу низку нормальних площин і, таким чином, отримати цілий ряд нормальних перерізів. Із нормальних перерізів суттєве значення мають два головних взаємно перпендикулярних перерізи: один з найбільшою

кривиною $\frac{1}{R_2}$ та другий: з найменшою $\frac{1}{R_1}$ Кривину будь-якого нормального перерізу можна виразити через кривину головних перерізів за формулою Ейлера

$$\frac{1}{R} = \frac{\cos^2 A}{R_1} + \frac{\sin^2 A}{R_2}, \quad (1.9)$$

де A - азимут даного нормального перерізу.

Крім кривини нормального перерізу, в сфероїдальній геодезії використовується ***Гаусова кривина***

$$K = \frac{1}{R_1 R_2},$$

а величина

$$R_c = \sqrt{R_1 R_2} \quad (1.10)$$

носить назву ***середнього радіуса*** кривини.

В нормального перерізу хоча б в одній точці головна нормаль збігається з нормаллю до поверхні. Ця точка називається *геодезичною точкою.* В геодезичній точці. нормального перерізу кут ν рівний нулю. Відповідно, нормальна кривина рівна кривині нормального перерізу в його геодезичній точці. Криву на поверхні, в якої всі точки геодезичні, тобто головна нормаль збігається з нормаллю до поверхні у всіх точках, називають *геодезичною лінією.* Геодезичні лінії на поверхні відіграють роль прямих на площині, тому багато положень диференціальної геометрії на площині можуть бути узагальнені для поверхонь з заміною прямих геодезичними.

Контрольні запитання

1. Дати визначення кривини плоскої кривої.
2. Дати визначення нормальної площини.
3. Дати визначення стичної площини.
4. Дати визначення геодезичної лінії.
5. Що таке нормальний переріз?
6. Наведіть формулу визначення Гаусової кривини.
7. Сутність теореми Меньє.
8. Дати визначення кривини просторової кривої.

Лекція 5. Чисельні методи у сфероїдальній геодезії

Чисельні методи використовують для розв'язку диференціальних рівнянь і обчислення еліптичних інтегралів.

Під час розв'язку задач сфероїдальної геодезії доводиться мати справу з наступними обчислювальними задачами:

- апроксимація функцій (поліноміальна, дробово-раціональна),
- чисельне інтегрування (квадратурні формули Гауса, Чебишева),
- чисельні методи розв'язку диференційних рівнянь з початковими умовами (методи Рунге - Кутта).

Апроксимація функцій (наближення) - це заміщення різноманітних функцій "близькими" до них, більш зручними для використання, функціями. До задач апроксимації функцій з параметрами, що входять лінійно, відносяться задачі апроксимації поліномами, а з параметрами, що входять нелінійно - дробово-раціональні апроксимації. Наближене представлення неперервної функції за допомогою полінома степені n можна отримати за допомогою ряда Тейлора та цілої низки його модифікацій, а одним із найбільш ефективних методів отримання необхідного числа дробово-раціональних наближень заданої функції є *метод ланцюгових дробів*.

Безпосереднє отримання коефіцієнтів цих функцій пов'язане з довгими алгебраїчними обчисленнями і на даний час такий шлях не є ефективним, оскільки простіше виконати обчислення із заданою функцією.

Наближене обчислення визначеного інтегралу можна виконувати різними методами: Сімпсона, Гаусса, Чебишева, Ромберга тощо.

Для обчислення інтеграла $\int_b^a f(x)dx$ ***методом Сімпсона*** інтервал інтегрування ділять на n рівних частин *(n* - парне число).

Для кожної вузлової точки k (k=0,1,2,...,n) з кроком $h = \frac{b-a}{n}$ за аргументом $x_k = a + kh$

обчислюють значення підінтегральної функції $f(x_k)$. Після цього визначений інтеграл може бути обчислений за формулою:

$$\int_b^a f(x)dx = \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + 2y_4 + ... + 4y_{n-1} + 4y_n). \quad (1.11)$$

За Гаусом наближене обчислення визначеного інтегралу полягає в наступному. В проміжку між граничними значеннями аргументів *x=a і x =b* вибирають n вузлових точок за рівнянням

$$x_i = a + v_i(b-a), \qquad i = 1,2,3,...,n ,$$

де v_I, - деяке постійне число менше одиниці, віднесене до відповідної вузлової точки. Для кожної вузлової точки за аргументом x_i обчислюють значення підінтегральної функції, яке потім домножують на деяке постійне число, що відповідає цій точці.

Таблиця 1

Значення сталої R_t в залежності від n

n=1	v_1=0.5	R_1=1
n=2	v_1=1-v_2=0.21132487	R_1=R_2=0.5
n=3	v_1=1-v_3=0.1127016654 v_2=0.5	R_1=R_3=0.2777777778 R_3=0.4444444444
n=4	v_1=1-v_4=0.0694318442 v_2=1-v_3=0.3300094782	R_1=R_4=0.1739274226 R_2=R_3=0.3260725774
n=5	v_1=1-v_5=0.0469100770 v_2=1-v_4=0.2307653449 v_3=0.5	R_1=R_5=0.1184634425 R_2=R_4=0.2393143352 R_3=0.2844444444
n=6	v_1=1-v_6=0.0337652429 v_2=1-v_5=0.1693953068 v_3=1-v_4=0.3806904070	R_1=R_6=0.0856622462 R_2=R_5=0.1803807865 R_3=R_4=0.2339569673

Значення інтеграла можна обчислити за наступною формулою:

$$\int_b^a f(x)dx = (b-a)\sum_{i=1}^{n} R_i f(x_i), \qquad (1.12)$$

Права частина рівняння тим ближча до точного значення інтегралу, чим більше вузлових точок використовується.

Метод Рунге-Кутта належить до багатоточкових однокрокових методів чисельного інтегрування систем звичайних диференційних рівнянь. Суть методу Рунге-Кутта полягає в наступному. Нехай функція визначається диференційним рівнянням: $\dfrac{dy}{dx} = f(x, y)$

та початковими значеннями $y=y_0$ при $x=x_0$. Слід знайти чисельне значення функції y_n для заданого значення аргумента.

Для визначення y_n послідовно обчислюють значення функцій y_i для рівновіддалених проміжних значень $x_i=x_0+h_i$ $(I=1,2,\dots n)$ причому за початкові приймають значення x_{i-1} і y_{n-1}, знайдені в попередньому обчисленні. Прирости аргумента $h = \dfrac{x_n - x_0}{n}$ є кроком інтегрування, величина якого встановлюється в залежності від заданої точності визначення функції.

Функцію y_i обчислюють за формулою:

$$y_i = y_0 + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) + 0(h^5), \qquad (1.13)$$

Де $k_1 = hf(x_0, y_0)$;

$$k_2 = hf(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{k_1}{2});$$

$$k_3 = hf(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{k_2}{2}); \qquad (1.14)$$

$$k_4 = hf(x_0 + h, y_0 + k_3).$$

позначення $0(h^k)$ свідчить про те, що у формулах знехтувано доданками порядку h^k.

При виведенні цих формул вихідним рівнянням послужило розкладання функції y_i в ряд Тейлора за степенями h до четвертого порядку.

Для розв'язування системи звичайних диференційних рівнянь виду:

$$\begin{cases} y_1' = f_1(x, y_1, y_2, \ldots, y_n), \\ y_2' = f_2(x, y_1, y_2, \ldots, y_n), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n' = f_n(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) \end{cases}$$

будується система рівновіддалених точок $x_i = x_0 + ih$. Обчислення y_{ji} в кожній точці здійснюється за формулою:

$$y_{ji} = y_{ji-1} + \frac{1}{6}(k_{j,1} + 2k_{j,2} + 2k_{j,3} + k_{j,4}), \qquad (1.15)$$

де j - номер рівняння системи, i - номер точки інтегрування. Коефіцієнти k_{ji} визначаються за формулами, аналогічними (1.14).

Класичний метод Рунге-Кутта частково модифікувався для практичних застосувань в основному для прискорення та спрощення процесу обчислень. Найбільш відомі модифікації Мерсона та Інгланда.

На сучасному рівні розвитку обчислювальних засобів особливого виграшу ці модифікації не дають, а отже класичний метод Рунге-Кутта залишається базовим методом чисельного інтегрування диференційних рівнянь першого порядку.

Контрольні запитання

1. Поясніть сутність апроксимації функцій.
2. Обчислення визначеного інтегралу методом Сімсона.
3. Обчислення визначеного інтегралу методом Гауса.
4. Обчислення визначеного інтегралу методом Рунге-Кутта.

Модуль 2. ГЕОМЕТРІЯ ЗЕМНОГО ЕЛІПСОЇДА

Лекція 6. Параметри земного еліпсоїда, зв'язки між ними

Поверхня еліпсоїда утворюється від обертання еліпса навколо його малої (полярної) осі.

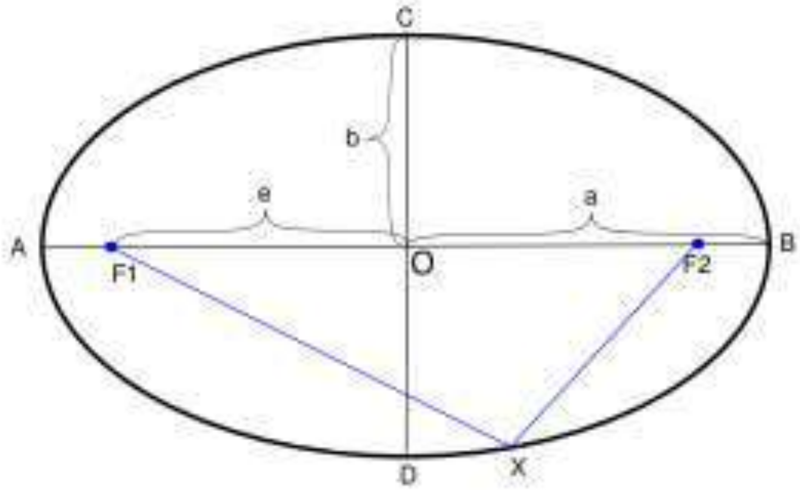


Рис. 2.1. Еліпс

Будь-який еліпс визначається розмірами його великої a і малої b півосей (рис. 2.1). За розмірами півосей можна знайти положення фокусів F_1 і F_2 еліпса

$$OF_1 = OF_2 = \sqrt{a^2 - b^2}$$

Відносна величина, що визначається із співвідношення $e' = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{b}$ називається першим ***ексцентриситетом*** еліпса.

Мають застосування і інші відносні величини:

другий ексцентриситет $e'^2 = \frac{e^2}{1 - e^2}$, (2.1)

Крім великої та малої півосей еліпса, часто застосовується ще одна лінійна величина, що визначається із співвідношення, яке має назву полярне стиснення:

$$\propto = \frac{a-b}{a} \qquad (2.2)$$

Приведені лінійні та відносні величини еліпса називаються ***параметрами еліпса*** і відносяться також і до еліпсоїда обертання. Параметри a – велика (екваторіальна) піввісь еліпсоїда і b- мала (полярна) піввісь еліпсоїда або a і α називають основними параметрами, що визначають еліпсоїд обертання, а квадрати першого та другого ексцентриситетів e^2 та e'^2 -

похідними.

Для виводу числових значень параметрів земного еліпсоїда, переважно великої півосі та сплющення, використовуються відповідні геодезичні, астрономічні, гравіметричні і супутникові виміри.

Відомо багато еліпсоїдів, параметри яких визначались в різних регіонах Землі і названі на честь видатних вчених, керівників робіт, що їх визначали:

Назва еліпсоїда	Екваторіальний радіус, м	Стиснення
Красовського(1940	6378245	1/298.3
Міжнародний(1924)	6378388	1/297.0
Кларка(1880)	6378249	1/293.46
Бесселя(1841)	6377397	1/299.15
Ері(1830)	6377563	1/299.32
Евереста(1830)	6377276	1/300.80
Гельмерта (1906)	6378200	1/298.3
WGS66(1966)	6378145	1/298.25
GRS67(1967)	6378160	1/298.25
WGS72(1972)	6378135	1/298.26
GRS80 (1979)	6378137	1/298.26
WGS84	6378137	1/298.26

Для ***еліпсоїда Красовського***, що застосовується в геодезичних роботах в Україні, крім основних параметрів, згідно приведених вище формул зв'язку, маємо

b = 6356863.01877;

e^2 = 0.006693421623;

На даний час, згідно резолюції XVII Генеральної Асамблеї Міжнародної геодезичної та геофізичної спілки (Канбера, 1979), офіційною референцною системою Міжнародної асоціації геодезії є Геодезична Референцна Система 1980 року - GRS80. Ця система визначає основні параметри загального земного (глобального) еліпсоїда. Серед них

a =6378137 м,

e^2 = 0.006694380023;

Прийняття загального земного чи референц-еліпсоїда, тобто його розмірів, є одним з основних чинників, що характеризує певну систему геодезичних координат.

Контрольні запитання

1. Якими параметрами визначається еліпсоїд обертання.
2. За якою формулою визначається полярне стиснення?
3. Наведіть основні параметри референц-еліпсоїда Красовського.
4. Наведіть формулу визначення першого ексцентриситету.
5. Наведіть формулу визначення другого ексцентриситету.

Лекція 7. Рівняння поверхні еліпсоїда

Поверхня, як відомо із аналітичної геометрії, визначається рівнянням в прямокутних декартових координатах:

$$F(x, y, z) = 0 \qquad (2.3)$$

Поверхню можна ще визначити з допомогою трьох рівнянь, що виражають координати x, y, z у функції довільних параметрів u, v.

$$x = x(u,v), \quad y = y(u,v), \quad z = z(u,v), \qquad (2.4)$$

Виключивши ці параметри із трьох рівнянь (2.4), прийдемо до рівняння виду (2.3). Якщо в рівняннях (2.4) надамо параметрам u, v певні значення, то і для x, y, z отримаємо цілком визначені значення. Отже, кожній парі значень u,v відповідає певна точка на даній поверхні.

Параметри u, v відіграють, очевидно, роль координат на даній поверхні; їх називають криволінійними координатами.

Надамо параметру v в рівнянні (2.4) яке-небудь постійне значення, а параметр u будемо змінювати. Рівняння (2.4) в такому випадку виражають x, y, z у функції одного довільного параметра u і, відповідно, визначають деяку лінію на поверхні. Змінюючи значення параметра, отримаємо множину ліній $v = const$.

Цілком аналогічно маємо другу множину ліній $u = const$. Лінії тієї і другої множини називаються *координатними лініями;* вони аналогічні прямим на площині, що визначаються рівняннями $x=const$ і $y=const$.

Із аналітичної геометрії відомо, що рівняння поверхні двохосьового еліпсоїда обертання може бути записане у вигляді

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1. \qquad (2.5)$$

Це - рівняння виду (2.3)

Для поверхні еліпсоїда обертання рівняння виду (2.4) матимуть вигляд

$$\begin{aligned} x &= a\cos u \cos v, \\ y &= a\cos u \sin v, \\ z &= b\sin u. \end{aligned} \qquad (2.6)$$

Виключення параметрів u, v із рівнянь (2.6), як було сказано вище, повинно привести до рівняння (2.5). Із перших двох рівнянь (2.6) отримаємо

$$x^2 + y^2 = a^2 cos^2 u .$$

Це рівняння і третє рівняння (2.6) можуть бути написані в наступному виді

$$cos^2 u = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2},$$

Їхня сума і дає нам рівняння (2.5).

Виясним геометричний зміст координатних ліній. Перш за все розглянемо лінію u=*const*.

$$r = a\cos u \qquad (2.7)$$

$x^2 + y^2 = r^2 = const$ -- рівняння кола (2.8)

$$z = b\,sin\,u = const.$$

Ці формули показують, що площина z=*const* (рис 2.2) паралельна площині *xy* і перетинає поверхню еліпсоїда по колу радіуса r.

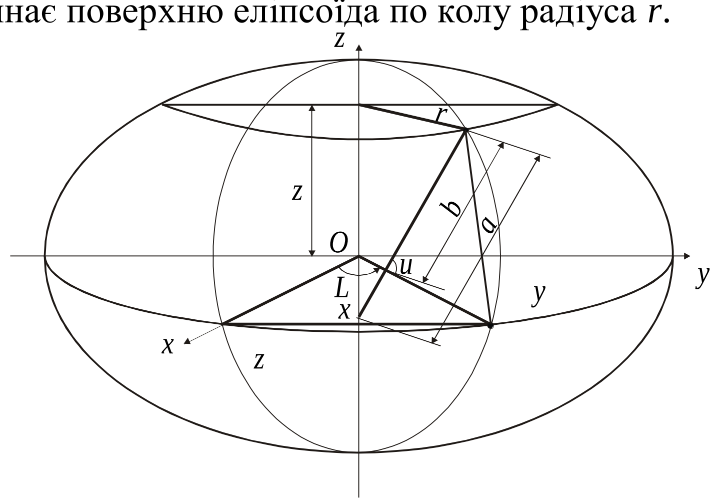


Рис. 2.2 До визначення параметра u

Коло u=*const* називається *паралеллю*, а параметр u – широтою.

Паралель з найбільшим радіусом *r=a (z=0)* називається *екватором.* Екватор ділить еліпсоїд на дві симетричні половини.

Криві v =*const* є еліпсами і утворюються в результаті перетину поверхні еліпсоїда площинами, що вміщують вісь *z*. Вони називаються *меридіанами,* а параметр v, який для поверхні еліпсоїда позначається буквою L – ***геодезичною довготою.***

Якщо в рівнянні (2.5) виключити координати за (2.8), то отримаємо рівняння меридіана

$$\frac{r^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1 \qquad (2.9)$$

Широта u та довгота L є криволінійними координатами точки на поверхні еліпсоїда; рівняння (2.9) – це рівняння еліпса, параметризоване широтою u, яка носить назву - ***приведена*** широта.

Приведена широта u може бути побудована геометрично. Візьмемо відрізок прямої, рівний великій півосі еліпсоїда, і відкладемо його так, щоб один кінець відрізка лежав на поверхні еліпсоїда в деякій точці Q , а другий – на осі обертання еліпсоїда в точці $Q^{'}$ (рис 2.3)

Гострий кут, утворений відрізком $QQ^{'}$ з площиною екватора, називається ***приведеною широтою***.

Поверхня може бути задана також змінним радіус–вектором *r*, та геоцентричною широтою $\boldsymbol{\Phi}$.

Геоцентричною широтою називається кут, утворений радіус–вектором даної точки з площиною екватора.

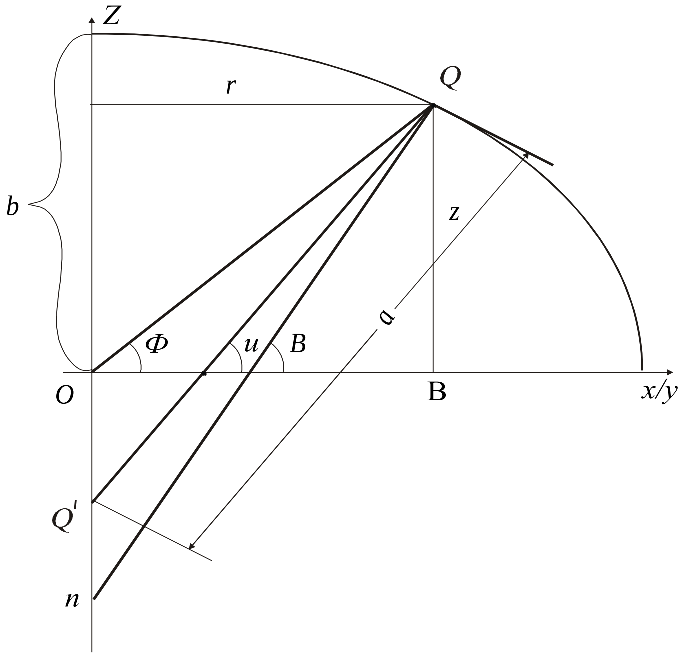


Рис. 2.3 Визначення приведеної *u* та геоцентричної широти $\boldsymbol{\Phi}$

Із прямокутного трикутника OQB (рис2.3) отримаємо:

$$tg\boldsymbol{\Phi} = \frac{BQ}{OB} = \frac{b\sin u}{a\cos u}, \qquad (2.10)$$

Або $$tg\Phi = \frac{b}{a}tgu = \sqrt{1-e^2}\,tgu. \qquad (2.11)$$

Із трикутника OQB (рис. 2.3) для радіус-вектора r_e отримаємо наступні вирази:

$$\begin{aligned} r &= r_e\cos\boldsymbol{\Phi}, \\ z &= r_e\sin\boldsymbol{\Phi}, \end{aligned} \qquad (2.12)$$

а враховуючи (2.9), радіус-вектор еліпсоїда у функції геоцентричної широти буде

$$r_e = \left(\frac{cos^2 \boldsymbol{\Phi}}{a^2} + \frac{sin^2 \boldsymbol{\Phi}}{b^2} \right)^{-\frac{1}{2}}. \qquad (2.13)$$

Контрольні запитання

1. Дайте визначення координатних ліній.
2. Наведіть формулу рівняння поверхні двохосьового еліпсоїда обертання.
3. Дайте визначення приведеної широти.
4. Дайте визначення геоцентричної широти.

Лекція 8. Зв'язок між геодезичною, приведеною і геоцентричною широтами

Для того щоб встановити зв'язок геодезичної широти B з приведеною u, розглянемо який-небудь меридіан, наприклад, такий, площиною якого є площина zx (див. рис. 2.2). Для цього меридіана $L=const$ і його рівняння в параметричній формі отримаємо із рівнянь (2.6).

Тангенс кута, утвореного нормаллю з віссю x (рис. 2.4), дорівнює похідній $\frac{dx}{dz}$, взятій з оберненим знаком, тобто

$$tgB = -\frac{dx}{dz} \quad \text{або} \quad tgB = u\frac{a}{b}$$

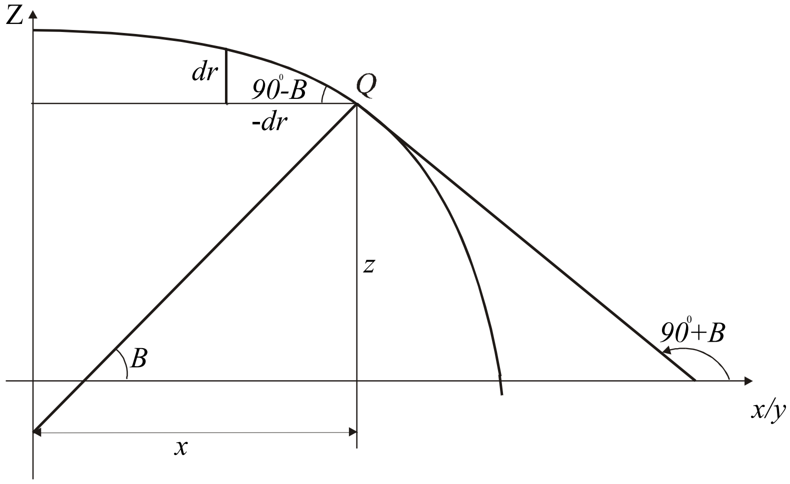


Рис. 2.4 Зв'язок геодезичної широти B з приведеною u

Із останньої формули можна отримати

$$sinB = \frac{\mathrm{a\ sin\ u}}{\sqrt{a^2sin^2u + b^2cos^2u}}$$

,

$$cosB = \frac{a\sqrt{1-e^2}cosu}{\sqrt{a^2sin^2u + b^2cos^2u}}$$

Увівши позначення

$$V = \frac{a}{\sqrt{a^2sin^2u + b^2cos^2u}}$$

отримаємо наступні формули зв'язку між геодезичною B та приведеною u широтами.

$$cosB = V\sqrt{1-e^2}\cos u; \qquad sinB = Vsin\,u \qquad (2.14)$$

Приймаючи до уваги третю формулу (2.1) отримаємо

На основі формул (2.11) та (2.15) зв'язок між геоцентричною широтою $\boldsymbol{\Phi}$ та геодезичною B буде наступним:

$$tg\,u = \sqrt{1-e^2}tgB \qquad (2.15)$$

$$tg\,\Phi = \sqrt{1-e^2}tgB \qquad (2.16)$$

Для подальшого викладу нам будуть необхідні ще наступні залежності, що легко отримуються із (2.15)

$$\cos u = \frac{\cos B}{\sqrt{1-e^2sin^2B}} \qquad (2.17)$$

$$\sin u = \frac{\sqrt{1-e^2}sinB}{\sqrt{1-e^2sin^2B}}$$

Якщо ввести позначення

$$W = \sqrt{1-e^2sin^2B} \qquad (2.18)$$

то формули (2.17) будуть мати наступний вид

$$\cos u = \frac{\cos B}{W}; \qquad sinu=\frac{\sqrt{1-e^2}}{W}sinB \qquad (2.19)$$

Згідно формул (2.19) і (2.14) можна записати зв'язок між величинами V та W $\quad W = V\sqrt{1-e^2} \qquad (2.20)$

Із формули (2.20) з врахуванням (2.18) та зв'язку між ексцентриситетами (перша формула із 2.1) отримаємо вираз для V у функції геодезичної широти B $\quad V = \sqrt{1+e'^2cos^2B} \qquad (2.21)$

Функції V та W називають ще ***основними сфероїдними функціями геодезичної широти.***

У сфероїдній геодезії часто використовується позначення

$$e'cosB = \eta \qquad (2.22)$$

тоді

$$V^2 = 1+\eta^2 \qquad (2.23)$$

Контрольні запитання

1. Наведіть формулу першої сфероїдичної функції геодезичної широти.
2. Наведіть формулу другої сфероїдичної функції геодезичної широти.
3. Наведіть формули зв'язку між геодезичною B та приведеною u широтами.

Лекція 9. Зв’язки між різними видами координат

Між просторовими прямокутними (декартовими) X, Y, Z та геоцентричними $\boldsymbol{\Phi}, L$ координатами, на основі формул (2.6)

$$X = r\cos L,$$
$$Y = r\sin L,$$
$$Z = z,$$

та отриманих співвідношень (2.12), існують прості математичні залежності

$$X = r_e \cos \boldsymbol{\Phi} \cos L,$$
$$Y = r_e \cos \boldsymbol{\Phi} \sin L, \quad (2.24)$$
$$Z = r_e \sin \boldsymbol{\Phi}.$$

Радіус-вектор еліпсоїда r_e визначається із (2.13).

Обернені залежності, на основі (2.24), будуть мати наступний вид

$$tgL = \frac{Y}{X},$$
$$tg\boldsymbol{\Phi} = \frac{Z}{\sqrt{X^2 + Y^2}}. \quad (2.25)$$

Між просторовими прямокутними координатами X, Y, Z, приведеною широтою u та геодезичною довготою L на основі формул (2.6) та отриманих співвідношень між великою та малою півосями (див. третю формулу (2.1)), існують наступні залежності

$$X = \mathrm{a}\cos u \cos L$$
$$Y = a\cos u \sin L$$
$$Z = a\sqrt{1 - e^2}\sin u \quad (2.26)$$

Обернені залежності, на основі (2.26), будуть мати наступний вид

$$tgL = \frac{Y}{X},$$
$$tgu = \frac{Z\sqrt{1 - e^2}}{\sqrt{X^2 + Y^2}}. \quad (2.27)$$

Враховуючи співвідношення (2.16) та (2.26), для поверхневих еліпсоїдних координат B, L та декартових X, Y, Z формули зв'язку мають вид

$$X = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 B}} \cos B \cos L,$$
$$Y = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 B}} \cos B \sin L,$$
$$Z = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 B}} (1 - e^2) \sin B,$$

Вираз $\frac{a}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 B}}$ позначимо через N і, як буде видно із подальшого викладу, це є рівняння для радіуса кривини першого вертикалу заданої точки на поверхні еліпсоїда у функції геодезичної широти. Остаточно, формули зв'язку будуть наступними:

$$X = N \cos B \cos L,$$
$$Y = N \cos B \sin L, \quad (2.28)$$
$$Z = N(1 - e^2) \sin B,$$

Обернені залежності будуть мати наступний вид

$$tgL = \frac{Y}{X},$$
$$tgB = \frac{Z}{\sqrt{X^2 + Y^2}} \frac{1}{(1 - e^2)}. \quad (2.29)$$

Перша формула (2.29) отримана простим перетворенням (шляхом ділення другої формули (2.28) на першу). Друга формула (2.29) отримана наступним чином. Із перших двох формул (2.28) отримаємо

$$\sqrt{X^2 + Y^2} = N \cos B.$$

Поділивши третє рівняння (2.28) на отримане, дістанемо остаточно друге рівняння (2.29).

Зв'язок між геодезичними координатами B, L, H та декартовими X, Y, Z отримаємо наступним чином. Якщо спроектувати висоту H на відповідні осі, тоді проекції висоти будуть виражені залежностями

$$\Delta X = H \cos B \cos L,$$
$$\Delta Y = H \cos B \sin L,$$
$$\Delta Z = H \sin B.$$
$$X = X + \Delta X = (N + H) \cos B \cos L,$$
$$Y = Y + \Delta Y = (N + H) \cos B \sin L, \quad (2.30)$$
$$Z = Z + \Delta Z = (N(1 - e^2) + H) \sin B.$$

Обернені залежності будуть мати наступний вид

$$tgL = \frac{Y}{X},$$

$$tgB_{i+1} = \frac{Z}{R} + \frac{btgB_i}{c + tg^2 B_i}, \quad (2.31)$$

$$tgB_1 = \frac{Z}{R},$$

$$R = \sqrt{X^2 + Y^2}, \quad b = \frac{ae^2}{R\sqrt{1-e^2}}, \qquad c = \frac{1}{1-e^2},$$

$$H = \frac{Z}{sin\,B} - (1-e^2)N.$$

Вираз для обчислення довготи L знаходимо аналогічно (2.29), а обчислення широти B, як видно із (2.31) вимагає застосування процесу наближень. Формула для B отримана наступним чином. На основі рівнянь (2.30), після нескладних перетворень, отримаємо:

$$\frac{Z}{\sqrt{X^2+Y^2}} = tgB\left(1 - \frac{e^2 N}{N+H}\right),$$

а також

$$(N+H)cos\,B = \sqrt{X^2+Y^2}.$$

Тоді $\dfrac{Z}{\sqrt{X^2+Y^2}} = tgB\left(1 - \dfrac{ae^2\,cos\,B}{\sqrt{1-e^2\,sin^2 B}\sqrt{X^2+Y^2}}\right),$

або $tgB = \dfrac{Z}{R} + \dfrac{ae^2 tgB\,cos\,B}{\sqrt{1-e^2\,sin^2 B}\;R}$. (2.32)

Поділимо чисельник і знаменник у другому доданку (2.32) на $cos\,B$ і в результаті перетворень отримаємо

$$tgB = \frac{Z}{R} + \frac{ae^2 tgB}{\sqrt{1+tg^2 B - e^2 tg^2 B}\;R},$$

а помноживши знаменник другого доданку ще на $\dfrac{\sqrt{1-e^2}}{\sqrt{1-e^2}}$ та після деяких перетворень, остаточно отримаємо формулу, яка після відповідних позначень буде відповідати (2.31).

Що стосується переходу від поверхневих еліпсоїдних координат *B,L* до плоских *x,y,* то вид формул залежить від способу зображення (проекції) поверхні еліпсоїда на площині.

Контрольні запитання

1. Наведіть формули зв'язку між просторовими прямокутними та геоцентричними координатами.
2. Формули зв’язку між просторовими прямокутними координатами X, Y, Z, приведеною широтою u та геодезичною довготою L.
3. Зв’язок між геодезичними координатами B, L, H та декартовими X, Y, Z.

Лекція 10. Головні радіуси кривизни в даній точці еліпсоїда

В будь-якій точці поверхні еліпсоїда обертання головними нормальними перерізами є:

1) меридіальний переріз, тобто нормальний переріз, що проходять через задану точку Q і полюси еліпсоїда PP_1;

2) переріз першого вертикалу, що проходить через точку Q і перпендикулярний до меридіального перерізу точки Q.

Радіус кривини меридіального перерізу буде радіусом кривини плоскої кривої, від обертання якої утворилась дана поверхня обертання. У сфероїдній геодезії він позначається буквою *M*. Радіус кривини другого головного перерізу - *N*. Вказані радіуси аналогічні радіусам R_1 та R_2 (лекція 6).

Згідно теореми Меньє (1.7), радіус кривини першого вертикалу N буде рівний радіусу паралелі r , поділеному на косинус кута між площиною паралелі та нормаллю до поверхні

$$N = \frac{r}{CosB} \qquad (2.33).$$

Це означає, що радіус кривини головного перерізу, перпендикулярного до меридіального, рівний відрізку нормалі до поверхні від поверхні до осі обертання (рис 2.5).

Радіуси кривини M та N , як функції широти B даної точки, застосовуються в багатьох теоретичних і практичних розрахунках. У функції широти радіус кривини меридіана *M* може бути виражений через формули (1.2) або через коефіцієнти першої та другої квадратичних форм поверхні (1.7).

На основі другої групи формул (1.2) та з врахуванням рівняння (2.6) в редакції (2.9) для радіуса кривини меридіана можна записати:

$$M = \frac{(dx^2 + dz^2)^{3/2}}{dxd^2z - dzd^2x}$$

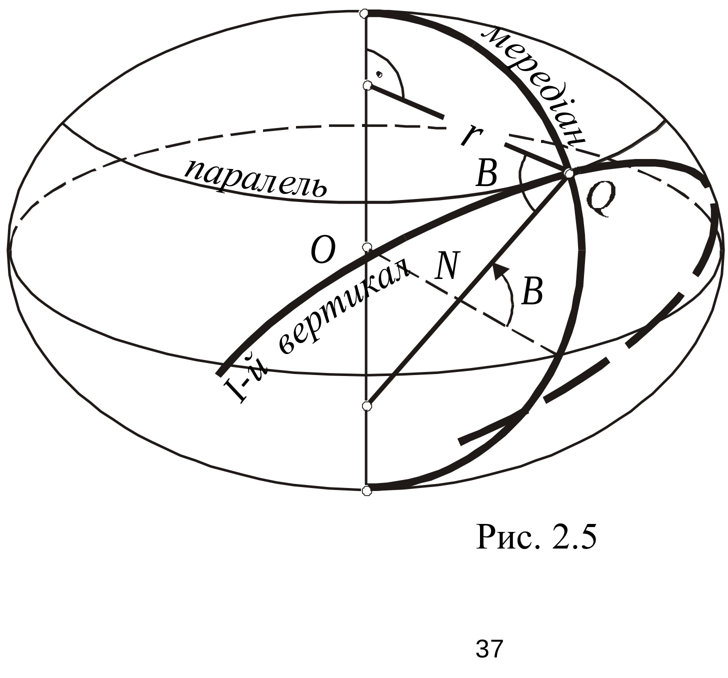


Рис. 2.5

Підставивши у вище наведену формулу значення похідних, отримаємо вираз для радіуса кривини M

$$M = \frac{(a^2 \sin^2 udu^2 + b^2 \cos^2 udu^2)^{3/2}}{abdu},$$

Або $M = \dfrac{(a^2 \sin^2 u + b^2 \cos^2 u)^{3/2}}{ab}$. (2.34)

Вираз (2.34) можна перетворити

$$M = \frac{a^3(1 - \frac{a^2 - b^2}{a^2} cos^2 u)^{3/2}}{ab} = \frac{a^2}{b}(1 - e^2 cos^2 u)^{3/2}$$

З врахуванням першої формули (2.20) та формули (2.21), остаточний вираз для радіуса кривини меридіана M буде мати вид

$$M = \frac{a(1-e^2)}{(1-e^2 sin^2 B)^{3/2}} \qquad (2.35)$$

З врахуванням (2.11) вираз для радіуса кривини першого вертикалу N буде

$$N = \frac{a}{(1-e^2 sin^2 B)^{1/2}}, \qquad (2.\ 36)$$

а використовуючи першу із формул (2.16), остаточно отримаємо

$$N = \frac{a \cos u}{\cos B}$$

Величини M та N характеризують форму поверхні еліпсоїда в околицях даної точки.

Більшим за значенням є радіус кривини N. Дійсно, згідно формул (2.35) і (2.36), маємо

$$\frac{N}{M} = \frac{1 - e^2 \sin^2 B}{1 - e^2} \geq 1.$$

$\frac{M}{N} = 1$ тільки при $B=90°$, тобто на полюсі, де радіус кривини

$$c = M_{90^0} = N_{90^0} = \frac{a}{\sqrt{1-e^2}} = a\sqrt{1 + e'^2} = \frac{a^2}{b} \qquad (2.37)$$

Відношення різниці головних радіусів кривини до меншого із них може бути виражений формулою

$$\frac{N-M}{M}=\frac{e^2}{1-e^2}cos^2B=e'^2cos^2B=\eta^2$$

Величина η^2 характеризує відступ форми еліпсоїда в околицях даної точки від сфери.

Досить часто застосовуються і інші вирази для радіусів M та N

$$M=\frac{c}{V^3};\qquad N=\frac{c}{V} \qquad (2.38)$$

З використанням введених позначень, формулу (1.8) із розділу 1, запишемо у виді

$$\frac{1}{R_A}=\frac{cos^2 A}{M}+\frac{sin^2 A}{N},(2.39)$$

Дана формула встановлює залежність радіуса кривини нормального перерізу, проведеного під азимутом A, від радіуса кривини меридіана та першого вертикала.

Середнє геометричне значення із головних радіусів кривини називається *середнім радіусом кривини* еліпсоїда обертання.

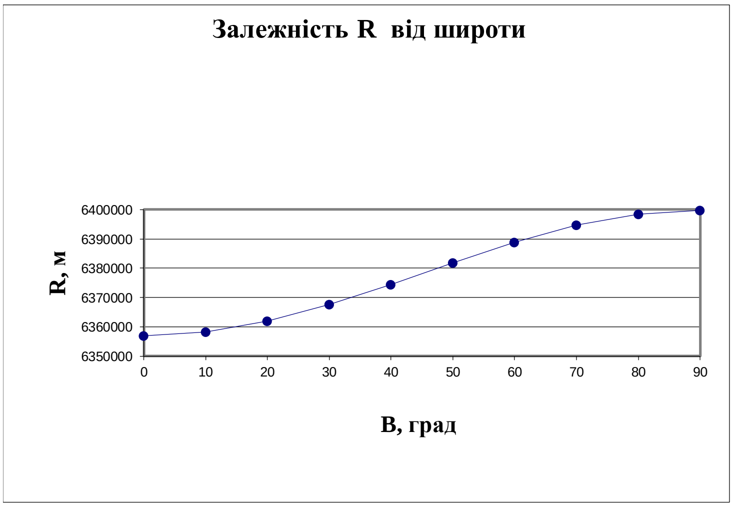


Рис. 2.6

Середній радіус кривини застосовується при зображенні частин еліпсоїда на кулі або на площині, при обчисленнях площ і сферичних надлишків фігур на поверхні еліпсоїда. Наближені значення середнього радіуса кривини для різних широт можна знайти графічно (рис. 2.6).

При розв'язуванні деяких задач Землю доводиться приймати за кулю. Якщо це робиться для досить наближених розрахунків, радіус кулі R приймається рівним 6 371 км, в інших випадках можна прийняти $R=\frac{a+a+b}{3}$.

Контрольні запитання

1. Головні нормальні перерізи еліпсоїда обертання.
2. Наведіть формулу радіуса кривини меридіану.
3. Наведіть формулу радіуса кривини першого вертикалу.
4. Як визначити середній радіус кривини еліпсоїда обертання.

Лекція 11. Довжини дуг меридіана та паралелі. Площа сфероїдної трапеції

Через дану точку на поверхні еліпсоїда можна провести низку різних ліній. Кожна з цих ліній певним чином зорієнтована відносно однієї з координатних ліній, а саме меридіана. Кут орієнтування, тобто кут між дотичними, проведеними до меридіана в північному напрямі та заданою лінією, називається ***геодезичним азимутом А.*** Він відраховується від меридіана за годинниковою стрілкою. Один азимут може мати декілька різних ліній. Це буде в тому випадку, коли ці лінії мають спільну дотичну в даній точці, наприклад, паралель і перший вертикал в заданій точці поверхні еліпсоїда мають однаковий азимут, який дорівнює 90^0 (або 270^0), хоча розташовані вони в різних площинах.

Диференціал дуги ds довільної кривої на поверхні еліпсоїда називається ***лінійним елементом*** поверхні еліпсоїда.

На поверхні еліпсоїда координатні лінії мають своє позначення: X – довжина дуги меридіана від екватора (в сторону полюса) до даної точки; Y – довжина дуги паралелі від середнього (початкового) меридіана до даної точки.

Відомо, що для будь-якої кривої радіус її кривини в даній точці дорівнює відношенню диференціала дуги кривої до диференціалу кута між дотичними до кривої в крайніх точках цієї дуги. Якщо позначити диференціал дуги меридіана через dX , а паралелі через dY , диференціал кута між дотичними до крайніх точок елемента дуги меридіана через dB , а паралелі через dL , то, згідно вище зазначеного, для диференціалів дуг меридіана та паралелі отримаємо відповідно

$$dX = MdB, \qquad dY = rdL = N\cos BdL.$$

Звідки

$$\begin{aligned} ds\,cosA &= dX = MdB \\ ds\,sinA &= dY = NcosBdL \end{aligned} \tag{2.40}$$

$$ds^2 = M^2dB^2 + N^2cos^2BdL^2 \tag{2.41}$$

Спроектувавши лінійний елемент на координатні лінії (лінії меридіанів та паралелей), отримаємо (див. рис 2.7)

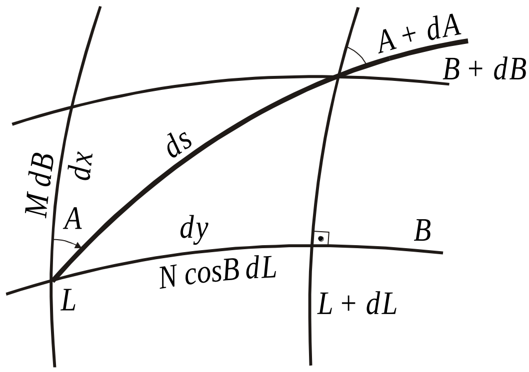


Рис. 2.7

Отримане рівняння (2.41) є аналогом рівняння (1.4) для поверхні еліпсоїда обертання, тобто є першою квадратичною формою поверхні еліпсоїда.

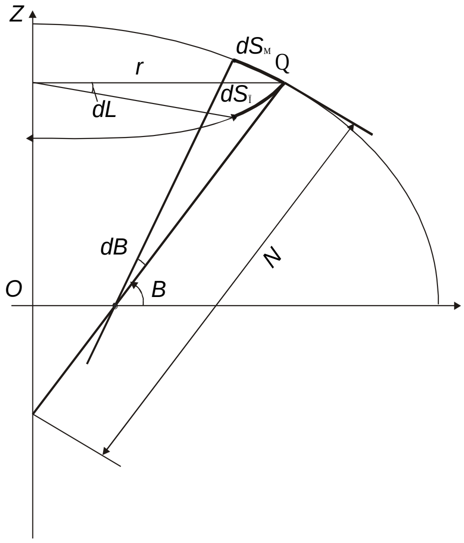
Характер зміни довготи та широти при переміщенні вздовж будь-якої лінії на поверхні еліпсоїда, може бути виражений наступними диференціальними рівняннями, що випливають із (2.40)

$$\frac{dB}{ds} = \frac{\cos A}{M}. \qquad (2.42)$$

$$\frac{dL}{ds} = \frac{\sin A}{N \cos B}. \qquad (2.43)$$

Серед цих формул відсутній вираз, що характеризує зміну азимута A в залежності від переміщення вздовж лінії на величину ds. Справа в тому, що ця залежність не буде однаковою для всіх ліній, тоді як приведенні вище формули відносяться до будь-якої лінії на поверхні.

Оскільки у формулі лінійного елемента поверхні еліпсоїда (2.41) кожна складова в правій частині є квадрат диференціала дуги координатної лінії, то звідти отримаємо наступні вирази для довжин дуг меридіана та паралелі:



$$dX = MdB;$$
$$X = \int_{B_1}^{B_2} MdB;$$
$$dY = N\cos BdL; \qquad (2.44)$$
$$Y = \int_{L_1}^{L_2} N\cos BdL.$$

Рис. 2.9

На практиці також часто виникає необхідність обчислення площі частин поверхні еліпсоїда (сфероїдних трапецій), які представляють площі знімальних трапецій.

Сфероїдною трапецією називається частина поверхні еліпсоїда, обмежена меридіанами і паралелями (рис 2.10).

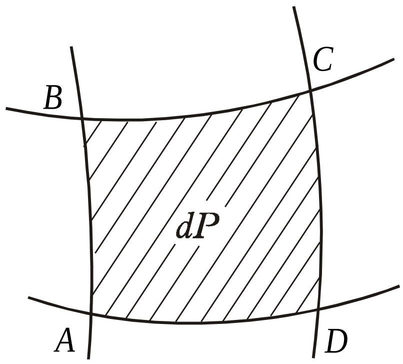


Рис. 2.10

Елемент площі сфероїдної трапеції dP визначається добутком диференціалів дуг координатних ліній: $dP=dXdY$. Замінивши dX і dY їх значеннями за формулами (2.40) отримаємо

$$dP = MN\cos BdBdL,$$

де M і N визначаються формулами (2.35) і (2.36) відповідно.

Тоді площа сфероїдної трапеції визначається подвійним інтегралом:

$$P = b^2 \int_{L_1}^{L_2}\int_{B_1}^{B_2}(1 - e^2 sin^2 B)^2 cosBdBdL, \qquad (2.45)$$

Обчислення довжини дуги меридіана

Обчислення довжини дуги меридіана *X*, згідно (2.39), зводиться до знаходження еліптичного інтегралу,

$$X = a(1 - e^2)\int_{B_1}^{B_2}(1 - e^2\, sin^2 \mathrm{B})^{-3/2} dB \qquad (2.46)$$

який в елементарних функціях не береться. Одним із класичних шляхів його знаходження є розклад підінтегрального виразу в біноміальний ряд з подальшим почленним інтегруванням. Маємо

$$(1-e^2\sin^2 B)^{-3/2} = 1+\frac{3}{2}e^2\sin^2 B+\frac{15}{8}e^4\sin^4 B+\frac{35}{16}e^6\sin^6 B+....$$

Замінивши в цьому виразі парні степені синуса косинусами кратних дуг згідно відомих рівнянь

$$\sin^2 B = \frac{1}{2}(-\cos 2B+1),$$
$$\sin^4 B = \frac{1}{8}(\cos 4B-4\cos 2B+\frac{6}{2}),$$
$$\sin^6 B = \frac{1}{32}(-\cos 6B+6\cos 4B-15\cos 2B+\frac{20}{2}),$$

та згрупувавши постійні члени і позначивши їх буквами $A, B, C, D, ...$, отримаємо

$$X = a(1-e^2)\int_{B_1}^{B_2}(A-2B\cos 2B+4C\cos 4B-6D\cos 6D+...)dB.$$

Звідси, після почленного інтегрування і підстановки границь, знайдемо остаточно

$$X = a(1-e^2)\left\{\begin{array}{l} A(B_2-B_1)-\frac{B}{2}(\sin 2B_2-\sin 2B_1)+ \\ +\frac{C}{4}(\sin 4B_2-\sin 4B_1)- \\ -\frac{D}{6}(\sin 6B_2-\sin 6B_1)+... \end{array}\right\} \quad (2.47)$$

Коефіцієнти A, B, C, D визначаються із наступних виразів, основним аргументом яких є ексцентриситет еліпсоїда

$$\left.\begin{array}{l} A = 1+\frac{3}{4}e^2+\frac{45}{64}e^4+\frac{175}{256}e^6+... \\ B = \frac{3}{4}e^2+\frac{15}{16}e^4+\frac{525}{512}e^6+... \\ C = \frac{15}{64}e^4+\frac{105}{256}e^6+... \\ D = \frac{35}{512}e^6+... \end{array}\right\|. \quad (2.48)$$

За формулою (2.47) можна знайти довжину дуги земного меридіана будь-якої довжини, взявши при цьому необхідну кількість членів розкладу.

Для обчислення довжини дуги меридіана від екватора ($B_1 = 0^0$) до будь-якої паралелі з широтою B, формула (2.47) отримає наступний вид

$$X = a(1-e^2)\left\{AB - \frac{B}{2}\sin 2B + \frac{C}{4}\sin 4B - \frac{D}{6}\sin 6B + ...\right\} \quad (2.49)$$

Формулу (2.49) можна представити ще в такому виді

$$X = A_0 B - A_2 \sin 2B + A_4 \sin 4B - A_6 \sin 6B + ..., \quad (2.50)$$

де коефіцієнти A_0, A_2, A_4, A_6 визначаються через параметри прийнятого еліпсоїда

$$\begin{aligned}
A_0 &= a(1-e^2)\left[1 + \frac{3}{4}e^2 + \frac{45}{64}e^4 + \frac{175}{256}e^6 + ...\right],\\
A_2 &= \frac{1}{2}a(1-e^2)\left[\frac{3}{4}e^2 + \frac{15}{16}e^4 + \frac{525}{512}e^6 + ...\right],\\
A_4 &= \frac{1}{4}a(1-e^2)\left[\frac{15}{64}e^4 + \frac{105}{256}e^6 + ...\right],\\
A_6 &= \frac{1}{6}a(1-e^2)\left[\frac{35}{512}e^6 + ...\right].
\end{aligned} \quad (2.51)$$

Вираз для довжини дуги меридіана при малих відстанях (довжини сторін або ланки тріангуляції 1 класу) можна отримати на основі застосування формули Тейлора з введенням середнього аргумента.

Позначимо довжини дуг меридіанів від екватора до точок з широтою B_1, B_2 та B_m через X_1, X_2 та X_m. Крім того,

$B_m = \dfrac{(B_2 - B_1)}{2}$; $\quad \Delta B = B_2 - B_1$. Тоді можна написати

$$X_2 - X_1 = \Delta X = f(B_2) - f(B_1) = f(B_m + \frac{\Delta B}{2}) - f(B_m - \frac{\Delta B}{2}). \quad (2.52)$$

Приймаючи різницю широт між двома точками ΔB малою величиною, запишемо ряд за степенями *ΔB*

$$\Delta X = \left\{X_m + \left(\frac{dX}{dB}\right)_m \frac{\Delta B}{2} + \left(\frac{d^2X}{dB^2}\right)_m \frac{\Delta B^2}{8} + \left(\frac{d^3X}{dB^3}\right)_m \frac{\Delta B^3}{48} + ...\right\} -$$

$$- \left\{X_m - \left(\frac{dX}{dB}\right)_m \frac{\Delta B}{2} + \left(\frac{d^2X}{dB^2}\right)_m \frac{\Delta B^2}{8} - \left(\frac{d^3X}{dB^3}\right)_m \frac{\Delta B^3}{48} + ...\right\},$$

Або $\Delta X = \left(\dfrac{dX}{dB}\right)_m \Delta B + \dfrac{1}{24}\left(\dfrac{d^3X}{dB^3}\right)_m \Delta B^3 + ...$ (2.53)

Індекс “*m”* при коефіцієнтах цього ряду означає, що вони обчислюються за середнім аргументом B_m. Похідні (i=1,3), можна знайти на основі першої формули (2.49) послідовним диференціюванням:

$$\left(\frac{dX}{dB}\right)_m = M_m,$$

$$\left(\frac{d^2X}{dB^2}\right)_m = \frac{3ae^2(1-e^2)\sin 2B_m}{2W_m{}^5} = \frac{3e^2M_m \sin 2B_m}{2W_m{}^2},$$

$$\left(\frac{d^3X}{dB^3}\right)_m = \frac{3ae^2(1-e^2)\cos 2B_m}{W_m{}^5}\left(1+\frac{5e^2 \sin 2B_m tg 2B_m}{4W_m{}^2}\right).$$

Тут W визначається формулою (2.17).

Останній вираз з точністю до членів з e^2 можна записати

$$\left(\frac{d^3X}{dB^3}\right)_m = 3M_m e^2 \cos 2B_m.$$

Підставивши значення похідних у (2.53), остаточно отримаємо

$$\Delta X = M_m\Delta B + \frac{1}{8}ae^2(1-e^2)cos2B_m\Delta B^3 + \cdots \quad (2.54)$$

де M_m обчислюється через B_m за формулою (2.35).

Другий член в правій частині формули (2.54) на широтах 45-55° складає всього лише 0,002м при $\Delta B \le 30'$. Тому для малих різниць широт ΔB, дугу меридіана можна розглядати як дугу кола з центральним кутом, який рівний різниці широт її крайніх точок , і описану радіусом меридіанного перерізу, рівному M_m, тобто

$$\Delta X = M_m\Delta B \quad (2.55)$$

Наближене значення інтегралу $X = \int\limits_{B_1}^{B_2} MdB$ можна обчислити на основі застосування чисельних методів розв'язування означених інтегралів. Серед них: формули трапецій, Сімпсона, Гаусса, Чебишева тощо. В розділі 1 приведено два методи обчислення інтегралу $\int\limits_a^b f(x)dx$: формули (1.10) для методу Сімпсона та (1.11) для методу Гаусса. Застосуємо вказані формули для обчислення довжини дуги меридіана між точками з широтами B_1 та B_2.

В першому випадку розділимо інтервал інтегрування на дві частини з кроком $h = \frac{B_2 - B_1}{2}$. Для кожної вузлової точки $k(k = 0,1,2)$ з кроком h за аргументом $B_k = B_1 + kh$ знаходимо значення підінтегральної функції M_k. Тоді, згідно (1.10), отримаємо

$$X_2 - X_1 = \frac{(B_2 - B_1)}{6}\left[M_1 + 4M_m + M_2\right]. \quad (2.56)$$

При застосуванні формули (1.11) виберемо дві вузлові точки (i=2). З врахуванням даних табл.1.1, визначимо аргументи функції M_i. При $i = 1$

аргументом буде значення широти $B_1+(B_2-B_1)0.21132487$, а при $i=2$ - $B_1+(B_2-B_1)0.78867513$. Остаточно, формула для обчислення довжини дуги меридіана методом Гаусса, буде

$$X_2-X_1=(B_2-B)_1\left[0.5M_1+0.5M_2\right]. \quad (2.57)$$

Вказані формули є рівноточними і дозволяють обчислювати довжину дуги меридіана при різниці широт до 5^0 з похибкою ≤ 0.001м. Для розширення широтного діапазону треба ділити інтервал інтегрування на більшу кількість частин (для методу Сімпсона) або вибирати більшу кількість вузлових точок (для методу Гаусса).

Можна поставити обернену задачу: при відомій довжині дуги меридіана ΔX і її середній широті чи X, знайти різницю широт кінцевих точок чи широту B.

На основі (2.55) отримаємо

$$\Delta B=(B_2-B_1)=\frac{\Delta X}{M_m}. \quad (2.58)$$

Для визначення широти B за довжиною дуги меридіана X за основу можна взяти формулу (2.49)

$$B=\frac{X}{a(1-e^2)A}+\frac{B}{2A}\sin 2B-\frac{C}{4A}\sin 4B+\frac{D}{6A}\sin 6B-.... (2.59)$$

Обчислення широти виконують методом послідовних наближень, приймаючи в першому наближенні $B=\dfrac{X}{a(1-e^2)A}$.

Коли за основу взяти формулу (2.49), то отримаємо наступні вирази

$$\begin{aligned}
B^I &= \frac{X}{A_o},\\
B^{II} &= B^I+\frac{A_2}{A_o}\sin(2B^I)-\frac{A_4}{A_0}\sin(4B^I),\\
B^{III} &= B^I+\frac{A_2}{A_o}\sin(2B^{II})-\frac{A_4}{A_o}\sin(4B^{II})+\frac{A_6}{A_o}\sin(6B^{II}), \quad (2.60)\\
B^{IV} &= B^I+\frac{A_2}{A_o}\sin(2B^{III})-\frac{A_4}{A_o}\sin(4B^{III})+\frac{A_6}{A_o}\sin(6B^{III}),\\
B &= B^I+\frac{A_2}{A_o}\sin(2B^{IV})-\frac{A_4}{A_o}\sin(4B^{IV})+\frac{A_6}{A_o}\sin(6B^{IV}).
\end{aligned}$$

Недоліком формул (2.59) та (2.60) при обчисленні широти є необхідність застосовування процесу наближень. Без наближень дана задача розв'язується методом перетворення (обертання) тригонометричних рядів. Якщо заданий тригонометричний ряд

$$y = x + p_2 \sin 2x + p_4 \sin 4x + p_6 \sin 6x + ...,$$

то наступний ряд

$$x = y + q_2 \sin 2y + q_4 \sin 4y + q_6 \sin 6y + ...,$$

буде оберненим по відношенню до заданого. Коефіцієнти в цих рівняннях пов'язані співвідношеннями

$$q_2 = -p_2 - p_2 p_4 + \frac{1}{2} p_2^{\,3} + ...,$$
$$q_4 = -p_4 + p_2^{\,2} + ...,$$
$$q_6 = -p_6 + 3p_2 p_4 - \frac{3}{2} p_2^{\,3} + ...$$

Якщо тепер за задану взяти формулу (2.50), то обернена до неї буде визначатися із виразу

$$B = \overline{A_0} X + \overline{A_2} \sin(2\overline{A_0} X) + \overline{A_4} \sin(4\overline{A_0} X) + \overline{A_6} \sin(6\overline{A_0} X), \quad (2.61)$$

де коефіцієнти $\overline{A_0}, \overline{A_2}, \overline{A_4}, \overline{A_6}$ знаходяться із співвідношень

$$\overline{A_0} = \frac{1}{A_0},$$
$$\overline{A_2} = \frac{A_2}{A_0} + \frac{A_2 A_4}{A_0^{\,2}} - \frac{1}{2}\left(\frac{A_2}{A_0}\right)^3,$$
$$\overline{A_4} = -\frac{A_4}{A_6} + \left(\frac{A_2}{A_0}\right)^2,$$
$$\overline{A_6} = \frac{A_6}{A_0} - 3\frac{A_2 A_4}{A_0^{\,2}} + \frac{3}{2}\left(\frac{A_2}{A_0}\right)^3.$$

Обчислення довжини дуги паралелі

Рівняння довжини дуги паралелі інтегрується зразу в кінцевому виді, оскільки паралель є колом (див. рис. 2.9) з радіусом $r = N\cos B$

$$Y = \Big|_{L_1}^{L_2} N\cos BL = (L_2 - L_1)N\cos B = lN\cos B. \quad (2.62)$$

Очевидно, що при одній і тій же різниці довгот $l = L_2 - L_1$ дуга паралелі на різних широтах буде мати неоднакову довжину, оскільки радіус паралелі залежить від широти.

Обернена задача, тобто знаходження різниці довгот, розв'язується строго на основі формули (2.62).

Обчислення площі сфероїдної трапеції

Для обчислення площі формулу (2.45), з врахуванням (2.62), представимо в наступному вигляді

$$P = b^2 (L_2 - L_1) \int_{B_1}^{B_2} (1 - e^2 \sin^2 B)^{-2} \cos B dB. (2.63)$$

після чого використаємо прийом, аналогічний як при знаходженні інтегралу (2.46), а саме, підінтегральну функцію (2.63) розкладемо в біномінальний ряд:

$$(1 - e^2 \sin^2 B)^{-2} = (1 + 2e^2 \sin^2 B + 3e^4 \sin^4 B + 4e^6 \sin^6 B + ...)\cos B .$$

Застосовуючи загальну формулу інтегрування

У формулі (2.64) B_1, B_2 та L_1, L_2- геодезичні координати вершин сфероїдної (знімальної) трапеції.

Якщо задана номенклатура знімальної трапеції, площу якої необхідно обчислити, то перш за все необхідно визначити геодезичні координати B і L її вершин. Для цього спочатку з допомогою бланкової номенклатури карти знаходять координати вершин трапеції масштабу 1:1000 000, а потім за стандартною процедурою (методом поділу масштабів) геодезичні координати вершин, заданої певним масштабом, трапеції.

Числовий приклад.

Для листа карти $M-36$ масштабу 1: 1 000 000 B_2=52°, B_1=48°, різниця довгот східної і західної рамок карти $L_2 - L_1 = 6^0$. Тоді, згідно формули (2.64), для еліпсоїда Красовського площа трапеції $M-36$ дорівнює $P = 191360$км^2.

Коли мова йде про дійсну площу ділянок фізичної поверхні Землі, то її підраховують не за приведеними формулами, а шляхом безпосереднього вимірювання площ на топографічних картах чи планах.

Для обчислення площі всієї поверхні земного еліпсоїда у формулі (2.64) треба прийняти $L_2 - L_1 = 2\pi$, $B_1 = -\frac{\pi}{2}$, $B_2 = \frac{\pi}{2}$. Тоді

$$P = 4\pi b^2 (1 + \frac{2}{3}e^2 + \frac{3}{5}e^4 + \frac{4}{7}e^6 + ...). (2.65)$$

На основі цієї формули можна знайти радіус еквівалентної кулі $R_к$, площа якої дорівнює площі еліпсоїда P

$$4\pi R_{к}^{2} = 4\pi b^2 (1 + \frac{2}{3}e^2 + \frac{3}{5}e^4 + \frac{4}{7}e^6 + ...),$$

Звідки $R_{к} = b\sqrt{1 + \frac{2}{3}e^2 + \frac{3}{5}e^4 + \frac{4}{7}e^6 + ...}$ (2.66)

Радіус кулі, рівновеликої за площею поверхні загального земного еліпсоїда WGS-84, дорівнює, згідно формули (2.66) 6370894м. Це значить, що при розв'язуванні деяких задач, в основному, наближеного характеру, коли форму Землі можна прийняти за кулю, її радіус потрібно брати 6371км.

Крім площі трапеції, на практиці приходиться обчислювати і лінійні розміри її рамок в масштабі карти. Рамки трапеції - це відрізки дуг меридіанів і паралелей. Формули для довжин рамок трапецій, у відповідності з формулами (2.58) та (2.62), будуть

$$\left. \begin{aligned} a_{1,см} &= 100\frac{N_1 \cos B_1}{m}(L_2 - L_1), \\ a_{2,см} &= 100\frac{N_2 \cos B_2}{m}(L_2 - L_1), \\ c_{,см} &= 100\frac{M_m}{m}(B_2 - B_1). \end{aligned} \right\}, \quad (2.67)$$

де m - знаменник масштабу карти. Позначення сторін трапеції показані на рис. 2.11.

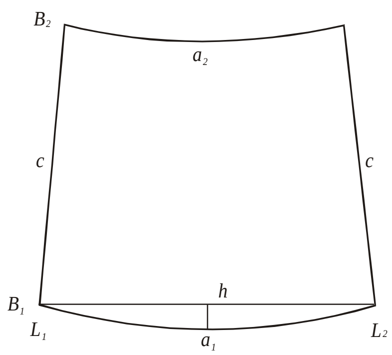


Рис. 2.11

Стрілку прогину рамки знімальної трапеції розраховують за формулою

$$h = \frac{1}{16}N_m \sin 2B_m (L_2 - L_1). \quad (2.68)$$

Зазначимо, що всі кутові величини, які входять у вище наведені формули безпосередньо, треба брати в радіанній мірі.

Контрольні запитання

1. Дайте визначення лінійного елемента поверхні еліпсоїда.
2. Дайте визначення геодезичного азимута.

3. Дайте визначення сфероїдної трапеції.
4. Наведіть формулу визначення довжини дуги меридіану.
5. Наведіть формулу визначення довжини дуги паралелі.
6. Наведіть формулу обчислення площі сфероїдної трапеції.

Список літератури

1. Закатов П.С. Курс высшей геодезии. М.: Недра, 1976. – 511 с.
2. Літнарович Р.М. Основи вищої геодезії. Чернігів, ЧДІЄіУ, 2002, - 147 с.
3. Морозов В. П. Курс сфероидической геодезии. М.: Недра, 1979. - 296 с.
4. Пеллинен Л.П. Высшая геодезия. М.: Недра, 1978. – 264 с.
5. Савчук С. Г. Вища геодезія. Житомир: ЖДТУ, 2005. − 315 с.
6. Староверов В.С. Вища геодезія. К.: ІЗМН, 1996. – 224 с.