КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ

УНІВЕРСИТЕТ ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА

Географічний факультет

Кафедра геодезії, картографії та землеустрою

Олександр ГОНЧАРЕНКО

МЕТОДИЧНІ РЕКОМЕНДАЦІЇ

до виконання практичних завдань з дисципліни

«Математичне опрацювання та програмування геодезичних вимірів»

для здобувачів освіти першого (бакалаврського) рівня вищої освіти

спеціальність G18 – Геодезія та землеустрій

Київ – 2025

УДК 528.3:519.2:004.4

Укладач: Гончаренко О.С., к.т.н., доцент кафедри геодезії, картографії та землеустрою Київського національного університету імені Тараса Шевченка.

Рецензенти:

Курач Т.М., к.геогр.н., доцент кафедри геодезії, картографії та землеустрою Київського національного університету імені Тараса Шевченка.

Міхно О.Г., к.т.н., доцент кафедри геодезії, картографії та землеустрою Київського національного університету імені Тараса Шевченка.

Затверджено Вченою радою географічного факультету Київського національного університету імені Тараса Шевченка (Протокол № 5 від 27.11.2025 року).

Методичні рекомендації до самостійного виконання практичних завдань з дисципліни «Математичне опрацювання та програмування геодезичних вимірів» для здобувачів освіти першого (бакалаврського) рівня вищої освіти, спеціальність G18 – Геодезія та землеустрій.

Укладач: Гончаренко О.С., к.т.н., доцент кафедри геодезії, картографії та землеустрою Київського національного університету ім. Т. Шевченка.

ЗМІСТ

ВСТУП

Методичні рекомендації для виконання практичних задач з дисципліни **«Математичне опрацювання та програмування геодезичних вимірів»** призначені для студентів спеціальності **G18**. У матеріалах подано систематизований виклад теоретичних положень і приклади розв’язання типових завдань, що охоплюють основні розділи курсу: аналіз похибок вимірювань, обчислення середніх та середньоквадратичних похибок, оцінка надійності результатів, похибки функцій від вимірюваних величин, а також методика обробки рядів рівноточних та подвійних вимірів.

Особлива увага приділяється алгоритмам застосування формул Гауса та Бесселя, методам перевірки достовірності результатів, а також практичним прийомам зведення даних у таблиці й виконання проміжних перевірок. Кожен модуль містить завдання для самостійної роботи з варіантами вихідних даних, що дозволяє студентам відпрацювати навички обчислень, закріпити знання та підготуватися до контролю знань.

Рекомендації сприяють формуванню вмінь студентів застосовувати математичний апарат для оцінки точності геодезичних вимірювань, критично аналізувати отримані результати, програмувати алгоритми обробки даних та розвивати навички самостійної роботи.

1. Похибки безпосередньо виміряних величин

Рис. 1. Класифікація похибок

За джерелом виникнення похибки вимірювань поділяються на кілька основних груп:

Методичні похибки – виникають через недосконаліть самого методу вимірювання. Вони можуть бути зумовлені:

- неповнотою або недостатнім обґрунтуванням теоретичних положень методу;
- використанням наближених формул для спрощення розрахунків;
- неврахуванням другорядних, але суттєвих факторів.

Інструментальні похибки – пов'язані з недосконалістю засобів вимірювальної техніки (ЗВТ). Їх причинами є:

- конструктивні та технологічні недоліки;
- неточність виготовлення або нестабільність елементів приладу;
- неправильне градуювання шкали;
- зношування або старіння обладнання.

Суб'єктивні (особисті) похибки – виникають внаслідок індивідуальних особливостей спостерігача (експериментатора). Вони можуть бути спричинені:

- недосконалістю зору чи слуху;
- зниженням уваги або втомленістю;

- помилками при зчитуванні показів.

За умовами проведення вимірювань

Основна похибка – це похибка, яка виникає під час застосування засобу вимірювальної техніки (ЗВТ) у нормальних умовах: температура повітря 20 ± 5 °С, атмосферний тиск 750 ± 30 мм рт. ст.**,** відносна вологість 65 ± 15%**.** Значення основної похибки є нормованим і обов'язково зазначається у супровідній технічній документації (технічному паспорті, формулярі тощо).

Додаткова похибка – похибка, що виникає при відхиленні однієї або кількох впливових величин (температури, тиску, вологості та ін.) від нормованих значень. Її величина, так само як і основна похибка, підлягає нормуванню та вказується у відповідних технічних документах.

Відмінності між основною та додатковою похибкою.

Умови виникнення. Основна похибка – виникає за нормальних умов експлуатації ЗВТ (температура, тиск, вологість у межах допустимих значень). *Додаткова похибка* з'являється при відхиленні впливових величин від нормованих умов.

Характеристика. Основна похибка – є базовим показником точності засобу вимірювання. *Додаткова похибка* – відображає вплив змін зовнішніх факторів на точність.

Нормування. Обидва види похибок підлягають нормуванню та обов'язково зазначаються у технічній документації (паспорт, формуляр).

За характером виявлення похибки поділяються на три основні групи:

Систематична похибка – це складова похибки, яка при повторних вимірюваннях однієї й тієї самої величини залишається сталою або змінюється за певним законом. Вона виникає під впливом факторів, дія яких не усунута або не врахована. Ці фактори можуть бути як постійними, так і такими, що закономірно змінюються. У ряді випадків систематичні похибки можна визначити дослідним шляхом.

За причинами виникнення систематичні похибки поділяють на *інструментальні* (недосконалість приладів, похибки градуювання); *суб'єктивні* (помилки спостерігача); *методичні* (обмеженість або спрощення обраного методу вимірювання); *від зовнішніх впливів* (зміна температури, вологості, тиску тощо). Повністю усунути систематичні похибки на практиці неможливо, тому будь-який результат вимірювання містить залишки не виключених систематичних похибок.

Випадкова похибка – складова похибки, яка проявляється у вигляді незначних відмінностей результатів при багаторазових вимірюваннях однієї й тієї ж величини в однакових умовах тим самим приладом. Вона зумовлена впливом численних випадкових факторів, між якими відсутній взаємний зв'язок. Саме тому результати вимірювань та їх похибки розглядають як випадкові величини. Іншими словами, кожен вимір неминуче «обтяжений» випадковими похибками.

Груба похибка – це похибка, яка істотно перевищує очікувану похибку за даних умов. Вона зазвичай виникає внаслідок помилки спостерігача, неправильної фіксації показів або грубих відхилень у роботі приладу. Такі похибки підлягають виявленню та виключенню з подальшої обробки результатів.

За характером зміни вимірюваної величини у часі.

Статична похибка – похибка при вимірюванні постійної в часі величини. Наприклад, похибка вимірювання постійного струму тощо.

Динамічна похибка – різниця між похибкою в динамічному режимі (похибка при вимірюванні змінної в часі величини) і статичною похибкою, яка відповідає значенню виміряної величини у відповідний момент часу.

За способом виразу.

Абсолютна похибка вимірювання — це алгебраїчна різниця між отриманим при вимірюванні значенням та істинним значенням вимірюваної величини:

$$\boldsymbol{\Delta x = x - X} \qquad (1)$$

де: Δx – абсолютна похибка вимірювання; x – результат вимірювання; X – істинне значення вимірюваної величини. Оскільки істинне значення вимірюваної величини невідоме, то його замінюють на середнє арифметичне $\boldsymbol{\bar{X}}$ (яке є наближеним до істинного). Таким чином, Δx визначається:

$$\boldsymbol{\Delta x = x - \bar{X}} \qquad (2)$$

Абсолютна похибка визначається в одиницях величини, яку вимірюють.

Відносна похибка – відношення абсолютної похибки вимірювання до істинного значення вимірюваної величини:

$$\delta_x = \frac{\boldsymbol{\Delta x}}{\boldsymbol{X}} \times 100\% \qquad (3)$$

Відносна похибка виражена в безрозмірних одиницях (або у відсотках). На практиці замість істинного значення використовують дійсне значення;

Приведена похибка – відношення абсолютної похибки до нормуючого значення вимірюваної величини:

$$\boldsymbol{\gamma = \frac{\Delta x}{X_{\text{норм.}}}} \qquad (4)$$

де $\boldsymbol{X_{\text{норм.}}}$- нормуюче значення.

Нормуюче значення приймають рівним:

- для засобів вимірювань, у яких нульова відмітка знаходиться на краю або за межами шкали, — кінцевому значенню діапазону вимірювань;
- якщо нульова відмітка знаходиться в межах діапазону вимірювань, — сумі кінцевих значень діапазону вимірювань;
- для вимірювальних приладів з суттєвою нерівномірністю шкали нормуюче значення встановлюють рівним в усій довжині шкали або її частині, відповідній до діапазона вимірювань.

Середня похибка (θ). Середнє арифметичне за абсолютними значення випадкових похибок називається середньою похибкою, тобто:

$$\theta = \frac{[|\Delta|]}{n} \quad (5)$$

де $[|\Delta|]=|\Delta_1|+|\Delta_2|+\ldots|\Delta_n|$

Ймовірна похибка (r). Ймовірною похибкою називається таке значення випадкової похибки, більше або менше якого за абсолютною величиною похибки рівно можливі. Із визначення ймовірної похибки отримуємо спосіб її відшукування. Якщо всі похибки розмістити в ряд за спаданням або зростанням значень абсолютної величини, то ймовірна похибка буде розміщена в середині цього ряду. Звідси вірогідну похибку часто називають середньою.

***Середня квадратична похибка (m*).** Середньою квадратичною похибкою називається величина, яка обчислюється за формулою:

$$m = \sqrt{\frac{[\Delta^2]}{n}} \quad (6)$$

де $\Delta_i = l_i - X$,(i=1,2,3,…n),

тут Δ_i-істинні похибки, X- істинне (точне) значення виміряної величини; l_i-результати вимірювань однієї тієї ж величини.

Зазвичай середній квадратичній похибці надається перевага над середньою і вірогідною з наступних причин:

-на величину середньої квадратичної похибки більшим є вплив великих за абсолютним значенням похибок;

-середня квадратична похибка є стійкою, тобто вона достатньо надійно визначається за невеликої кількості *n*.

Надійність середньої квадратичної похибки характеризується середньою квадратичною похибкою самої середньої квадратичної похибки, отриманої із експерименту, яка обчислюється за формулою:

$$m_m = \frac{m}{\sqrt{2n}} \quad (7)$$

Виходячи з цього, на практиці, для, достатньо надійного визначення *m*, прийнято виконувати не менше восьми вимірів(*n*≥*8*). Для теоретичних розрахунків слугує формула:

$$\Delta гран \leq 3m. \quad (8)$$

На практиці, враховуючі обмежену кількість вимірювань, застосовують умову $\Delta гран \leq 2m$. За нормального розподілу похибок вимірювань існують зв'язки між середньою, ймовірною та середньою квадратичною:

$$\Theta = \frac{4}{5}m; \qquad r = \frac{4}{5}m \quad (9)$$

1.1. Завдання для самостійної роботи

В результаті вимірювань лінійної величини, одержано ряд похибок. Визначити:
1) середню похибку;
2) ймовірну похибку;
3) середньоквадратичну похибку.
4) надійність СКП;
5) оцінити абсолютну граничну похибку.

Примітка. Завдання виконати згідно свого варіанта.

В1.
0,246; 0,344; 0,18; 0,196; 0,394; 0,46; 0,18; 0,492; 0,18; 0,394; 0,246; 0,32; 0,246; 0,27; 0,27; 0,5; 0,18; 0,32; 0,344; 0,18.

В2.
0,466; 0,588; 0,38; 0,33; 0,54; 0,22; 0,294; 0,22; 0,38; 0,294; 0,244; 0,6; 0,22; 0,416; 0,22; 0,416; 0,22; 0,294; 0,33; 0,466.

В3.
0,41; 0,58; 0,24; 0,268; 0,318; 0,502; 0,36; 0,318; 0,41; 0,452; 0,452; 0,36; 0,24; 0,24; 0,65; 0,502; 0,24; 0,24; 0,318; 0,636

В4.
0,538; 0,7; 0,44; 0,26; 0,26; 0,39; 0,26; 0,26; 0,684; 0,488; 0,26; 0,342; 0,62; 0,538; 0,488; 0,342; 0,44; 0,39; 0,342; 0,292

В5.
0,47; 0,75; 0,47; 0,366; 0,28; 0,66; 0,366; 0,28; 0,42; 0,732; 0,28; 0,42; 0,524; 0,316; 0,524; 0,28; 0,28; 0,574; 0,366; 0,574

В6.
0,825; 0,578; 0,31; 0,402; 0,804; 0,31; 0,402; 0,31; 0,31; 0,402; 0,628; 0,72; 0,515; 0,352; 0,515; 0,628; 0,465; 0,465; 0,31; 0,578

В7.
0,34; 0,51; 0,682; 0,9; 0,632; 0,876; 0,51; 0,78; 0,34; 0,56; 0,682; 0,34; 0,34; 0,632; 0,438; 0,388; 0,56; 0,438; 0,34; 0,438

В8.
0,54; 0,412; 0,36; 0,36; 0,59; 0,462; 0,924; 0,95; 0,718; 0,668; 0,668; 0,36; 0,36; 0,718; 0,462; 0,59; 0,54; 0,36; 0,82; 0,462

В9.
0,13; 0,186; 0,136; 0,13; 0,245; 0,13; 0,195; 0,304; 0,195; 0,254; 0,245; 0,36; 0,13; 0,186; 0,375; 0,304; 0,13; 0,186; 0,372; 0,254

В10.
0,15; 0,21; 0,275; 0,225; 0,29; 0,275; 0,15; 0,21; 0,34; 0,4; 0,16; 0,15; 0,42; 0,425; 0,34; 0,29; 0,15; 0,225; 0,15; 0,21

B11.
0,448; 0,282; 0,21; 0,575; 0,398; 0,315; 0,232; 0,448; 0,315; 0,21; 0,52; 0,398; 0,365; 0,21; 0,282; 0,365; 0,21; 0,564; 0,282; 0,21
B12.
0,306; 0,23; 0,395; 0,23; 0,23; 0,345; 0,612; 0,345; 0,434; 0,23; 0,484; 0,484; 0,306; 0,395; 0,306; 0,434; 0,625; 0,256; 0,56; 0,23
B13.
0,452; 0,502; 0,502; 0,24; 0,452; 0,636; 0,318; 0,268; 0,24; 0,318; 0,24; 0,24; 0,41; 0,41; 0,65; 0,24; 0,36; 0,318; 0,58; 0,36
B14.
0,246; 0,344; 0,18; 0,196; 0,394; 0,46; 0,18; 0,492; 0,18; 0,394; 0,246; 0,32; 0,246; 0,27; 0,27; 0,5; 0,18; 0,32; 0,344; 0,18
B15.
0,466; 0,588; 0,38; 0,33; 0,54; 0,22; 0,294; 0,22; 0,38; 0,294; 0,244; 0,6; 0,22; 0,416; 0,22; 0,416; 0,22; 0,294; 0,33; 0,466
B16.
0,41; 0,58; 0,24; 0,268; 0,318; 0,502; 0,36; 0,318; 0,41; 0,452; 0,452; 0,36; 0,24; 0,24; 0,65; 0,502; 0,24; 0,24; 0,318; 0,636
B17.
0,538; 0,7; 0,44; 0,26; 0,26; 0,39; 0,26; 0,26; 0,684; 0,488; 0,26; 0,342; 0,62; 0,538; 0,488; 0,342; 0,44; 0,39; 0,342; 0,292
B18.
0,47; 0,75; 0,47; 0,366; 0,28; 0,66; 0,366; 0,28; 0,42; 0,732; 0,28; 0,42; 0,524; 0,316; 0,524; 0,28; 0,28; 0,574; 0,366; 0,574
B19.
0,825; 0,578; 0,31; 0,402; 0,804; 0,31; 0,402; 0,31; 0,31; 0,402; 0,628; 0,72; 0,515; 0,352; 0,515; 0,628; 0,465; 0,465; 0,31; 0,578
B20.
0,34; 0,51; 0,682; 0,9; 0,632; 0,876; 0,51; 0,78; 0,34; 0,56; 0,682; 0,34; 0,34; 0,632; 0,438; 0,388; 0,56; 0,438; 0,34; 0,438
B21.
0,54; 0,412; 0,36; 0,36; 0,59; 0,462; 0,924; 0,95; 0,718; 0,668; 0,668; 0,36; 0,36; 0,718; 0,462; 0,59; 0,54; 0,36; 0,82; 0,462
B22.
0,13; 0,186; 0,136; 0,13; 0,245; 0,13; 0,195; 0,304; 0,195; 0,254; 0,245; 0,36; 0,13; 0,186; 0,375; 0,304; 0,13; 0,186; 0,372; 0,254
B23.
0,15; 0,21; 0,275; 0,225; 0,29; 0,275; 0,15; 0,21; 0,34; 0,4; 0,16; 0,15; 0,42; 0,425; 0,34; 0,29; 0,15; 0,225; 0,15; 0,21
B24.
0,448; 0,282; 0,21; 0,575; 0,398; 0,315; 0,232; 0,448; 0,315; 0,21; 0,52; 0,398;

0,365; 0,21; 0,282; 0,365; 0,21; 0,564; 0,282; 0,21

В25.

0,306; 0,23; 0,395; 0,23; 0,23; 0,345; 0,612; 0,345; 0,434; 0,23; 0,484; 0,484; 0,306; 0,395; 0,306; 0,434; 0,625; 0,256; 0,56; 0,23

В26.

0,452; 0,502; 0,502; 0,24; 0,452; 0,636; 0,318; 0,268; 0,24; 0,318; 0,24; 0,24; 0,41; 0,41; 0,65; 0,24; 0,36; 0,318; 0,58; 0,36

В27.

0,13; 0,186; 0,136; 0,13; 0,245; 0,13; 0,195; 0,304; 0,195; 0,254; 0,245; 0,36; 0,13; 0,186; 0,375; 0,304; 0,13; 0,186; 0,372; 0,254

В28.

0,15; 0,21; 0,275; 0,225; 0,29; 0,275; 0,15; 0,21; 0,34; 0,4; 0,16; 0,15; 0,42; 0,425; 0,34; 0,29; 0,15; 0,225; 0,15; 0,21

В29.

0,448; 0,282; 0,21; 0,575; 0,398; 0,315; 0,232; 0,448; 0,315; 0,21; 0,52; 0,398; 0,365; 0,21; 0,282; 0,365; 0,21; 0,564; 0,282; 0,21

В30.

0,306; 0,23; 0,395; 0,23; 0,23; 0,345; 0,612; 0,345; 0,434; 0,23; 0,484; 0,484; 0,306; 0,395; 0,306; 0,434; 0,625; 0,256; 0,56; 0,23

В31.

0,452; 0,502; 0,502; 0,24; 0,452; 0,636; 0,318; 0,268; 0,24; 0,318; 0,24; 0,24; 0,41; 0,41; 0,65; 0,24; 0,36; 0,318; 0,58; 0,36.

1.2. Приклад розв’язання завдання

В результаті вимірювань лінійної величини, одержано ряд похибок: 0,452; 0,502; 0,502; 0,24; 0,452; 0,636; 0,318; 0,268; 0,24; 0,318; 0,24; 0,24; 0,41; 0,41; 0,65; 0,24; 0,36; 0,318; 0,58; 0,36 . Визначити:

1) середню похибку;
2) ймовірну похибку;
3) середньоквадратичну похибку.
4) надійність СКП;
5) граничну похибку.

Розв’язання:

1) Знайдемо середню похибку за формулою (5)

$$\Theta = \frac{[|\Delta|]}{n} = \frac{1}{20}(0{,}452 + 0{,}502 + 0{,}502 + 0{,}24 + 0{,}452 + 0{,}636 + 0{,}318 + \\ +0{,}268 + 0{,}24 + 0{,}318 + 0{,}24 + 0{,}24 + 0{,}41 + 0{,}41 + 0{,}65 + 0{,}24 + \\ +0{,}36 + 0{,}318 + 0{,}58 + 0{,}36) = \\ = \frac{7{,}736}{20} = 0{,}3868$$

2) Для знаходження ймовірної похибки розмістимо похибки в порядку зростання, серединою одержаного ряду є число 0,36, отже ймовірно похибка r = 0,36.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0,24	**0,24**	**0,24**	**0,24**	**0,24**	**0,268**	**0,318**	**0,318**	**0,318**	**0,36**
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
0,36	**0,41**	**0,41**	**0,452**	**0,452**	**0,502**	**0,502**	**0,58**	**0,636**	**0,65**

3) Середньою квадратичну похибку визначимо за формулою (6)

$$m = \sqrt{\frac{[\Delta^2]}{n}} = \sqrt{\frac{3{,}334608}{20}} = 0{,}4083$$

4) Надійність СКП визначається формулою (7)

$$m_m = \frac{m}{\sqrt{2n}} = \frac{0{,}4083}{20} = 0{,}02$$

5) $\Delta_{\text{гран}} \leq 3m = 2 \cdot 0{,}4083 = 0{,}8166.$

2. Похибка функції

Досить часто виникає потреба визначати середню квадратичну похибку не безпосередньо виміряних величин, а тих, що отримуються шляхом обчислень із виміряних даних. Інакше кажучи, шуканий параметр виражається у вигляді функції від виміряних величин. У такому разі його похибка визначається через похибки аргументів, що входять до цієї функції. Припустимо що у функції загального виду:

$$F = f(x, y, z, \dots u) \qquad (10)$$

аргументи *x, y, z, … u*, незалежно виміряні зі середніми квадратичними похибками $m_x, m_y, m_z, \dots, m_u$. Якщо X, Y, Z, …U, – істинні значення аргументів, то їхні істинні похибки дорівнюють:

$$\Delta x = x - X$$

$$\Delta y = y - Y$$

$$\dots\dots\dots$$

$$\Delta u = u - U,$$

а істинна похибка функції: $\Delta F = f(x, y, \dots, u) - f(x - \Delta x, y - \Delta y, \dots, u - \Delta u)$.

Причому стандарти виміряних величин характеризуються середніми квадратичними похибками $\sigma_x, \sigma_y, \dots \sigma_u$. Тоді середня квадратична похибка функції буде дорівнювати:

$$m_F = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 m_x^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 m_y^2 + \dots + \left(\frac{\partial f}{\partial u}\right) m_u^2} \qquad (11).$$

2.1. Алгоритм визначення середньої квадратичної похибки функції виміряних величин.

Розрахунок СКП функції, що залежить від кількох незалежних виміряних величин, здійснюється у такій послідовності:

Запис функції у явному вигляді. Формально подається математичний вираз, що описує шукану величину як функцію від незалежних аргументів.

Обчислення частинних похідних. Визначаються частинні похідні функції за кожним із аргументів.

Знаходження числових значень похідних. Частинні похідні обчислюються у конкретних точках (для наявних значень виміряних величин).

Підстановка у загальну формулу. Обчислені значення частинних похідних та середні квадратичні похибки виміряних величин підставляються у формулу (11).

Обчислення результату. Виконавши необхідні обчислення, отримують шукану середню квадратичну похибку функції.

Окремі випадки:

1. Лінійна функція $y = \pm k_1 x_1 \pm k_2 x_2 \pm \ldots \pm k_n x_n$, а СКП незалежних змінних відповідно дорівнюють $m_{x1}; m_{x2}; \ldots; m_{xn}$ тоді СКП лінійної функції матиме вид:

$$m_y = \sqrt{k_1^2 \cdot m_{x1}^2 + k_1^2 \cdot m_{x1}^2 + .. + k_n^2 \cdot m_{xn}^2} \ . \qquad (12).$$

2. Для функції $y = \pm x_1 \pm x_2 \pm \ldots \pm x_n$ СКП матимеме вид:

$$m_y = \sqrt{m_{x1}^2 + m_{x1}^2 + .. + m_{xn}^2}. \qquad (13).$$

3. Якщо всі аргументи виміряні з однаковою точністю, тобто СКП незалежних змінних рівні$m_{x1} = m_{x2} = \cdots = m_{xn} = m$ тобто:

$$m_y = m\sqrt{n} \ . \qquad (14).$$

4. Якщо функція має вид $y = \frac{x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_p}{y_1 \cdot y_2 \cdot \ldots \cdot y_n}$ то,враховуючи правило зноходження похідної неявно заданої функції, СКП матимеме вид:

$$\frac{m_u}{u} = \sqrt{\sum_{i=1}^{p} \left(\frac{m_{xi}}{x_i}\right)^2 + \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{m_{yi}}{y_i}\right)^2} \qquad (15).$$

2.2. Завдання для виконання самостійних робіт.

Завдання до самостійної роботи 1.

Лінія АВ виміряна по частинах, результати наведено в таблиці 1.

Знайти абсолютну та відносну похибки обчислення довжини ламаної.

Таблиця №1.

№ Варіанта	1	2	3	4
1	150,13м±3,1см	148,14м±5,2см	145,96м±4,1см	14,01м±3,9см
2	140,17м±2,8см	138,14м±4,2см	135,96м±3,5см	13,21м±2,4см
3	155,53м±2,6см	151,54м±5,7см	149,56м±4,5см	15,51м±3,5см
4	153,37м±3,8см	155,14м±3,5см	150,46м±3,8см	14,23м±2,6см
5	147,43м±2,3см	138,23м±3,3см	147,43м±3,6см	14,53м±2,5см
6	142,56м±2,9см	136,43м±3,2см	134,56м±3,2см	13,56м±2,8см
7	154,56м±3,3см	153,84м±3,7см	139,78м±3,6см	15,82м±2,8см
8	151,57м±3,5см	150,24м±3,6см	146,48м±3,9см	14,63м±2,9см
9	143,45м±3,3см	138,23м±3,3см	147,43м±3,6см	14,53м±2,5см
10	148,36м±2,7см	141,55м±3,4см	135,66м±3,2см	13,76м±2,7см
11	152,35м±2,5см	148,23м±3,1см	124,38м±3,2см	14,83м±2,6см
12	122,35м±3,6см	132,23м±2,3см	135,53м±3,2см	14,23м±2,7см
13	134,16м±2,9см	121,24м±3,5см	138,17м±3,6см	13,26м±2,8см
14	150,13м±3,1см	148,14м±5,2см	145,96м±4,1см	14,01м±3,9см
15	140,17м±2,8см	138,14м±4,2см	135,96м±3,5см	13,21м±2,4см
16	155,53м±2,6см	151,54м±5,7см	149,56м±4,5см	15,51м±3,5см
17	153,37м±3,8см	155,14м±3,5см	150,46м±3,8см	14,23м±2,6см
18	147,43м±2,3см	138,23м±3,3см	147,43м±3,6см	14,53м±2,5см
19	142,56м±2,9см	136,43м±3,2см	134,56м±3,2см	13,56м±2,8см
20	154,56м±3,3см	153,84м±3,7см	139,78м±3,6см	15,82м±2,8см
21	151,57м±3,5см	150,24м±3,6см	146,48м±3,9см	14,63м±2,9см
22	143,45м±3,3см	138,23м±3,3см	147,43м±3,6см	14,53м±2,5см
23	148,36м±2,7см	141,55м±3,4см	135,66м±3,2см	13,76м±2,7см
24	152,35м±2,5см	148,23м±3,1см	124,38м±3,2см	14,83м±2,6см
25	122,35м±3,6см	132,23м±2,3см	135,53м±3,2см	14,23м±2,7см
26	134,16м±2,9см	121,24м±3,5см	138,17м±3,6см	13,26м±2,8см
27	143,45м±3,3см	138,23м±3,3см	147,43м±3,6см	14,53м±2,5см
28	148,36м±2,7см	141,55м±3,4см	135,66м±3,2см	13,76м±2,7см
29	152,35м±2,5см	148,23м±3,1см	124,38м±3,2см	14,83м±2,6см
30	122,35м±3,6см	132,23м±2,3см	135,53м±3,2см	14,23м±2,7см
31	134,16м±2,9см	121,24м±3,5см	138,17м±3,6см	13,26м±2,8см

Завдання для самостійної роботи №2.

Визначити середньоквадратичну похибку обчислення довжини кола та площу круга, радіусом R з СКП m_s

Таблиця №2.

Вихідні дані для самостійної роботи № 2.

В№	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
R, **мм**	51,6	51,1	50,5	49,8	49,3
m_s, **мм**	0,54	0,53	0,51	0,49	0,48
В№	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
R, **мм**	48,5	47,6	46,4	43,4	45,3
m_s, **мм**	0,46	0,43	0,41	0,35	0,4
В№	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**
R, **мм**	44,7	44,1	43,7	42,4	41,3
m_s, **мм**	0,39	0,38	0,35	0,34	0,31
В№	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**
R, **мм**	51,6	51,1	50,5	49,8	49,3
m_s, **мм**	0,54	0,53	0,51	0,49	0,48
В№	**21**	**22**	**23**	**24**	**25**
R, **мм**	48,5	47,6	46,4	43,4	45,3
m_s, **мм**	0,46	0,43	0,41	0,35	0,4
В№	**26**	**27**	**28**	**29**	**30**
R, **мм**	44,7	44,1	43,7	42,4	41,3
m_s, **мм**	0,39	0,38	0,35	0,34	0,31

Завдання для самостійної роботи №3.

Таблиця №3.

Визначити перевищення та СКП перевищення, якщо відома горизонтальна проекція та кут нахилу.

В№	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
l, **м**	150,13м±3,1м	521,2м±4м	34,5м±0,5м	49м±1м	120,4м±2,2м
α	$2^\circ 40' \pm 1'$	$5^\circ 30' \pm 3'$	$1^\circ 30' \pm 3'$	$3^\circ 30' \pm 2'$	$3^\circ 50' \pm 40''$
В№	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
l, **м**	250,13м±3,8м	535,2м±4м	65,5м±0,4м	149м±1,6	130,7м±1,2м
α	$4^\circ 30' \pm 40''$	$2^\circ 30' \pm 2'$	$1^\circ 20' \pm 4'$	$3^\circ 30' \pm 3'$	$4^\circ 30' \pm 3'$
В№	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**
l, **м**	210,45м±1,8м	325,2м±3м	165,5м±0,9м	249м±1,5м	150,5м±1,5м
α	$3^\circ 30' \pm 30''$	$3^\circ 20' \pm 3'$	$2^\circ 20' \pm 4'$	$4^\circ 30' \pm 3'$	$3^\circ 30' \pm 3'$
В№	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**
l, **м**	150,13м±3,1м	521,2м±4м	34,5м±0,5м	49м±1м	120,4м±2,2м
α	$2^\circ 40' \pm 1'$	$5^\circ 30' \pm 3'$	$1^\circ 30' \pm 3'$	$3^\circ 30' \pm 2'$	$3^\circ 50' \pm 40''$
В№	**21**	**22**	**23**	**24**	**25**
l, **м**	250,13м±3,8м	535,2м±4м	65,5м±0,4м	149м±1,6	130,7м±1,2м
α	$4^\circ 30' \pm 40''$	$2^\circ 30' \pm 2'$	$1^\circ 20' \pm 4'$	$3^\circ 30' \pm 3'$	$4^\circ 30' \pm 3'$
В№	**26**	**27**	**28**	**29**	**30**
l, **м**	210,45м±1,8м	325,2м±3м	165,5м±0,9м	249м±1,5м	150,5м±1,5м
α	$3^\circ 30' \pm 30''$	$3^\circ 20' \pm 3'$	$2^\circ 20' \pm 4'$	$4^\circ 30' \pm 3'$	$3^\circ 30' \pm 3'$

Завдання для самостійної роботи №4.

Відомі дві сторони трикутника (м) та кут між ними (°), знайти:

1) СКП (абсолютну, відносну) обчислення для третьої сторони;
2) СКП (абсолютну, відносну) обчислення площі трикутника;
3) СКП (абсолютну, відносну) обчислення периметра трикутника.
4) З якою СКП необхідно виміряти сторони та кут, щоб СКП обчисленої сторони дорівнював 0 , 5м.

Таблиця 5.

В№	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
a, м	132±2	124±1,3	126±1,1	132±1,4	145±1,1
b, м	115±1,5	137±2	154±2,1	110±1,3	112±1
α	20±10’	25±15’	30±20’	32±20’	35±25’
В№	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
a, м	149±1,3	152±1,5	157±1,6	161±1,8	170±2
b, м	124±1,2	132±1,3	121±1,5	98±0,5	190±2
α	54±40’	61±45’	65±50’	72±55’	60 ± 1^0
В№	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**
a, м	139±1,2	142±1,4	147±1,5	151±1,7	150±1,8
b, м	114±1,1	122±1,5	101±1,3	111±0,6	180±2
α	42±30’	60±45’	61±40’	64±50’	60 ± 1^0
В№	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**
a, м	132±2	124±1,3	126±1,1	132±1,4	145±1,1
b, м	115±1,5	137±2	154±2,1	110±1,3	112±1
α	20±10’	25±15’	30±20’	32±20’	35±25’
В№	**21**	**22**	**23**	**24**	**25**
a, м	149±1,3	152±1,5	157±1,6	161±1,8	170±2
b, м	124±1,2	132±1,3	121±1,5	98±0,5	190±2
α	54±40’	61±45’	65±50’	72±55’	60 ± 1^0
В№	**26**	**27**	**28**	**29**	**30**
a, м	139±1,2	142±1,4	147±1,5	151±1,7	150±1,8
b, м	114±1,1	122±1,5	101±1,3	111±0,6	180±2
α	42±30’	60±45’	61±40’	64±50’	60 ± 1^0

Завдання для самостійної роботи №5.

У результаті виконання трьох серій вимірювань довжини лінії було отримано середні значення для кожної серії (Таблиця 6). Необхідно визначити загальне середнє значення довжини.

Таблиця №6.

В№	I серія (м)	II серія (м)	III серія (м)
1	1457,3±0,5	1456,6±1,5	1458,1±2,2
2	245,5±0,5	245±0,8	243,7±2
3	389,4±0,5	390,2±0,4	398,6±0,8
4	1256,4±1,2	1254,6±2,8	1255,8±1,6
5	2335±3,2	2333±2,8	2337±4
6	1876,4±0,8	1877,9±1,5	1879±2,4
7	1370,1±0,8	1374±1,4	1372,6±1,8
8	213,5±0,4	214,2±0,5	215±0,8
9	986,4±1	987,3±1,8	988,9±2
10	324±0,8	324,8±0,6	323±1,6
11	1328,3±0,5	1326,6±1,5	1327,1±2,2
12	546,5±0,5	546±0,8	544,7±2
13	418,4±0,5	416,2±0,4	419,6±0,8
14	1132,4±1,2	1134,6±2,8	1137,8±1,6
15	2125±3,2	2122±2,8	2120±4
16	1457,3±0,5	1456,6±1,5	1458,1±2,2
17	245,5±0,5	245±0,8	243,7±2
18	389,4±0,5	390,2±0,4	398,6±0,8
19	1256,4±1,2	1254,6±2,8	1255,8±1,6
20	2335±3,2	2333±2,8	2337±4
21	1876,4±0,8	1877,9±1,5	1879±2,4
22	1370,1±0,8	1374±1,4	1372,6±1,8
23	213,5±0,4	214,2±0,5	215±0,8
24	986,4±1	987,3±1,8	988,9±2
25	324±0,8	324,8±0,6	323±1,6
26	1328,3±0,5	1326,6±1,5	1327,1±2,2
27	546,5±0,5	546±0,8	544,7±2
28	418,4±0,5	416,2±0,4	419,6±0,8
29	1132,4±1,2	1134,6±2,8	1137,8±1,6
30	2125±3,2	2122±2,8	2120±4

2.3. Приклади розв'язку практичних завдань.

Завдання 1.

Лінія АВ виміряна по частинах, результати наведено в таблиці. Знайти абсолютну та відносну похибки обчислення довжини ламаної.

134,16м±2,9см	121,24м±3,5см	138,17м±3,6см	13,26м±2,8см

Розв'язання

Довжина ламаної $l = 134{,}16 + 121{,}24 + 138{,}17 + 13{,}26 = 406{,}83м.$

Середню квадратичну похибку ламаної знайдемо за формулою

$m_l = \sqrt{2{,}9^2 + 3{,}5^2 + 3{,}6^2 + 2{,}8^2} = \sqrt{41{,}46} \approx 6{,}44$см

Завдання 2.

Визначити середньоквадратичну похибку обчислення довжини кола та площу круга, радіусом R=4,5мз СКП m_s =0,3мм.

Розв'язання

Довжина кола визначається за формулою $l = 2\pi R$, функція лінійна отже за формулою (3) $m_l = km = 2\pi \cdot 0{,}3 = 1{,}89$мм.

Площа круга: $S(R) = \pi R^2$, $S'(R) = 2\pi RS'(R_0) = 2\pi 4{,}5 = 9\pi$, тоді за формулою (2) $m_s = \frac{\partial S}{\partial R} m = 9\pi \cdot 0{,}3 \cdot 10^{-3} \approx 8{,}5 \cdot 10^{-3}$.

Завдання 3.

Визначити перевищення та СКП перевищення, якщо відома горизонтальна проекція 150,5м±1,5м та кут нахилу $3^\circ 30' \pm 3'$.

Розв'язання

Знайдемо перевищення за формулою $h = l \cdot tg\alpha$, залежність є функцією двох змінних, значення перевищення буде дорівнювати

$$h_0 = 150{,}5 \cdot tg3{,}5^0 = 150{,}5 \cdot 0{,}055 = 8{,}29м$$

Для знаходження середньої квадратичної похибки необхідно визначити значення частинних похідних

$$\frac{\partial h}{\partial l} = tg\alpha; \qquad \frac{\partial h}{\partial l} = tg3{,}5^0 = 0{,}055$$

$$\frac{\partial h}{\partial \alpha} = \frac{l}{cos^2\alpha}; \qquad \frac{\partial h}{\partial l} = \frac{150{,}5}{cos^2 3{,}5^0} = \frac{150{,}5}{0{,}997} = 150{,}96$$

За формулою (2):

$$m_h = \sqrt{0{,}055^2 1{,}5^2 + 150{,}96^2 \left(3\frac{\pi}{10800}\right)^2} = \sqrt{0{,}0068 + 0{,}0174} = 0{,}156.$$

Знайдене перевищення: $\mathbf{8{,}29м \pm 0{,}156м}$

Завдання 4.

Відомі дві сторони трикутника (м) та кут між ними (°), знайти:

1) СКП (абсолютну, відносну) обчислення для третьої сторони;
2) СКП (абсолютну, відносну) обчислення площі трикутника;
3) СКП (абсолютну, відносну) обчислення периметра трикутника.

a=150м±1,8м; b=180м±2м; γ=60°±1°.

Розв'язання

1) Третю сторону трикутника можна визначити за теоремою косинусів $c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2abcos\gamma}$, значення третьої сторони буде: $c = \sqrt{150^2 + 180^2 - 2 \cdot 150 \cdot 180 \cdot cos60°} = \sqrt{27900} \approx 167$м.

Для визначення СКП необхідно знайти частинні похідні функції, та їх значення при заданих параметрах:

$$\frac{\partial c}{\partial a} = \frac{1}{2\sqrt{a^2+b^2-2abcos\gamma}} \cdot (2a - 2bcos\gamma) = \frac{a-bcos\gamma}{c};$$
$$\frac{\partial c}{\partial a} = \frac{b-acos\gamma}{c};$$
$$\frac{\partial c}{\partial \gamma} = \frac{absin\gamma}{c}.$$

Знайдемо значення частинних похідних:

$$\frac{\partial c}{\partial a} = \frac{150-180cos60°}{167} = \frac{150-90}{167} = 0{,}36;$$
$$\frac{\partial c}{\partial a} = \frac{180-150cos60°}{167} = \frac{180-75}{167} = 0{,}63;$$
$$\frac{\partial c}{\partial \gamma} = \frac{180 \cdot 150 \cdot sin60°}{167} = 140.$$

Визначимо абсолютну СКП за формулою (11).

$$m_c = \sqrt{(0{,}36 \cdot 1{,}8)^2 + (0{,}63 \cdot 2)^2 + \left(140 \cdot \frac{\pi}{180}\right)^2} = \sqrt{0{,}42 + 1{,}59 + 5{,}97} =$$

2,83м.

Отже довжина третьої сторони: $167\text{м} \pm 2{,}83\text{м}$.

Відносна похибка буде становити: $\delta = \frac{m_c}{c} 100\% = \frac{2{,}83}{167} 100\% = 1{,}69\%$.

2) Площу трикутника можна визначити за формулою$S = \frac{1}{2} absin\gamma$, значення площі буде: $S = \frac{1}{2} 150 \cdot 180 \cdot sin60° = 150 \cdot 90 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 11691\text{м}^2$.

Завдання 5.

В результаті виконання трьох серій вимірювань довжини лінії одержали середні значення довжини для кожної серії. Визначити середньо вагове значення.

I серія (м)	II серія (м)	III серія (м)
2125±3,2	2002±2,8	2120±4

Вагове середнє знаходиться як середня зважена величина, для цього необхідно визначити вагу кожної серії вимірів за формулою $p=\frac{k}{m^2}$.Чисельник може бути будь яким числом, візьмемо к=10 тоді ваги серій вимірів будуть дорівнювати $p_1 = \frac{10}{3{,}2^2} = 0{,}98;\ p_2 = \frac{10}{2{,}8^2} = 1{,}28;\ p_1 = \frac{10}{4^2} = 0{,}625.$

Тоді середнє зважене: $x_0 = \frac{x_1p_1+x_2p_2+x_3p_3}{p_1+p_2+p_3} = \frac{2125\cdot 0{,}98+2002\cdot 1{,}28+2120\cdot 0{,}625}{0{,}98+1{,}28+0{,}625} = \frac{2082{,}5+2562{,}6+1325}{2{,}91} = 2051{,}58.$

Визначимо абсолютну СКП за формулою (2):

$$m_S = \sqrt{(78\cdot 1{,}8)^2 + (65\cdot 2)^2 + \left(10921{,}7\cdot\frac{\pi}{180}\right)^2} = \sqrt{19712{,}16 + 16900 + 36335{,}84} = 270\text{м}^2.$$

Отже площа трикутника: $11691\text{м}^2 \pm 270\text{м}^2$.

Відносна похибка буде становити: $\delta = \frac{m_S}{S}100\% = \frac{270}{11691}100\% = 2{,}3\%$.

3) Периметр трикутника визначатиметься за формулою$P = a + b + c$, значення периметра буде: $P = 150 + 180 + 167 = 497\text{м}$.

СКП периметра визначається за формулою (4):

$m_P = \sqrt{m_a^2 + m_b^2 + m_c^2} = \sqrt{1{,}8^2 + 2^2 + 2{,}83^2}$ =3,9м

Отже периметр трикутника:$497\text{м} \pm 3{,}9\text{м}$.

Відносна похибка буде становити: $\delta = \frac{m_P}{P}100\% = \frac{3{,}9}{497}100\% = 0{,}78\%$.

3. Обробка ряду рівноточних вимірювань однієї величини

Припустимо, що деяка величина, істинне значення якої дорівнює (X), виміряна (n) разів; у результаті вимірювань отримано значення x_1, x_2, …, x_n, вільні від систематичних похибок. Випадкові похибки результатів вимірювань дорівнюють:

$$\Delta_1 = x_1 - X$$
$$\Delta_2 = x_2 - X$$
$$\dots$$
$$\Delta n = xn - X$$

Підсумовуючи ліві та праві частини цих виразів, знаходимо

$\sum\Delta = \sum X - nX$, звідки $X = (\sum xi)/n$.

Останній доданок при великій кількості (n), на підставі 4-ї властивості, прямує до 0, тому:

$$\bar{X} \approx (x_1 + x_2 + x_3 + \dots + xn)/n \qquad (16)$$

де

$\bar{X}$ – значення арифметичної середини;

X' – приблизне значення виміряної величини (зазвичай саме ним користуються);

$\xi i = xi - \bar{X}$ – відхилення;

n – кількість вимірювань.

Формула (16) показує, що імовірнісне й середнє арифметичне з результатів рівноточних вимірів збігаються. Для визначення середньої квадратичної похибки арифметичної середини використовують основну теорему теорії похибок:

$$m_u = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)^2 m_{x_1}^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)^2 m_{x_2}^2 + \dots + \left(\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)^2 m_n^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^2 m_{x_i}^2}\ . \qquad (17)$$

Для більшої наочності перепишемо формулу (1) у вигляді виразу

$\bar{x} = \frac{x_1}{n} + \frac{x_2}{n} + \dots + \frac{x_n}{n}$.

Очевидно,

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = \frac{\partial f}{\partial x_2} = \dots \frac{\partial f}{\partial x_n} = \frac{1}{n}$$

$$M = \sqrt{\frac{1}{n^2}\left(m_{x_1}^2 + m_{x_2}^2 + \dots m_{x_n}^2\right)}.$$

Для рівноточних вимірювань $m_{x_1} = m_{x_2} = \dots = m_{x_i}$, тому середня квадратична похибка арифметичної середини:

$$M = \sqrt{\frac{nm_x^2}{n^2}} = \frac{m_x}{\sqrt{n}}.$$

Висновок: точність середнього арифметичного зростає зі збільшенням кількості вимірювань (n). Для визначення за формулою (6) середньої квадратичної похибки (m_x) одного вимірювання за формулою Гауса виразимо $[\Delta^2]$ через $[v^2]$, де $v_i=x_i-X$ – відхилення виміряної величини від арифметичної середини X.

Підставимо в $\Delta_i = x_i - X$ замість x_i його значення:

$x_i = x + v_1$, знаходимо $\Delta_i = x - X - v_i$.

Підносимо до квадрата ліву та праву частини, після підсумування отримаємо:

$$[\Delta^2] = n(\bar{x} - X) + [v^2] - 2(\bar{x} - X)[v]$$

Підсумовуючи ліву і праву частини виразів

$$v_1 = x_2 - \bar{x}$$
$$v_2 = x_2 - \bar{x}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$v_n = x_n - \bar{x},$$

отримуємо $[v] = [x] - n\bar{X}$.

Підставляємо замість $\bar{x}$ його значення із (1), маємо:

$$[v] = [x] - n\frac{[x]}{n} = 0$$

тобто сума відхилень (v) дорівнює нулю при будь-якій кількості вимірювань (перша властивість похибок). Якщо при визначенні середнього арифметичного (x) має місце похибка заокруглення

$$\beta = \bar{x}_{\text{заокруг}} - x_{\text{точн}} \text{ то } [v] = -n\beta. \quad (4)$$

Після ділення лівої та правої частини рівняння 1.3.3 на (n) отримуємо:

$$\frac{[\Delta^2]}{n} = (\bar{x} - X) + \frac{[v^2]}{n}$$

При великій кількості (n) значення істинної похибки арифметичної середини можна вважати рівним значенню M (2). Враховуючи формулу Гаусса $m = \sqrt{\frac{[\Delta^2]}{n}}$, отримаємо:

$$m^2 = \left(\frac{m^2}{n}\right) + \left(\frac{[\Delta^2]}{n}\right),$$

Звідки знаходимо формулу Бесселя

$$m = \sqrt{\frac{[v^2]}{n-1}}$$

Для контролю обчислень [v^2]використовують формулу$[\boldsymbol{v^2}] = [\boldsymbol{\Sigma^2}] - \frac{[\Sigma]^2}{n}$, де

$$\Sigma_i = x_i - x'$$

x'- приблизне значення вимірюваної величини (x).

Середні квадратичні похибки величини (m) і (M) визначають за формулами

$$\boldsymbol{m_m = \frac{m}{\sqrt{2(n-1)}} m_M = \frac{M}{\sqrt{2n}}}$$

3.1. Завдання для самостійної роботи.

В результаті вимірювання лінійної величини одержано ряд рівноточних вимірів. Знайти: 1) середнє заокруглене значення довжини лінії; 2) середньоквадратичну похибку одного виміру; 3) СКП середнього значення; 4) оцінити СКП виміру та СКП середнього значення.

В1.
110,347; 110,342; 110,357; 110,352; 110,345; 110,361; 110,367; 110,353; 110,373; 110,368

В2.
110,751; 110,832; 110,623; 110,352; 110,345; 110,221; 110,245; 110,358; 110,578; 110,234

В3.
220,732; 218,956; 219,342; 218,224; 221,325; 220,015; 219,961; 217,987; 219,548; 219,436

В4.
154,453; 155,768; 156,321; 154,978; 155,974; 154,346; 155,214; 154,986; 156,437; 157,456

В5.
176,567; 174,465; 175,987; 176,231; 174,982; 175,013; 176,325; 174,023; 177,237; 176,984

В6.
256,176; 253,872; 254,327; 254,794; 255,348; 256,673; 254,983; 255,781; 253,624; 257,028

В7.
378,217; 375,234; 376,562; 379,671; 375,312; 377,575; 374,276; 378,256; 379,213; 375,016

В8.
53,785; 54,458; 54,341; 53,368; 55,211; 54,763; 54,321; 55,374; 55,486; 53,897

В9.
76,876; 74,249; 75,348; 75,785; 76,325; 76,245; 76,581; 74,985; 74,652; 75,328

В10.
246,745; 245,786; 246,325; 245,284; 247,327; 246,521; 244,236; 244,753; 245,324; 246,763

B11.
60 110,347; 110,342; 110,357; 110,352; 110,345; 110,361; 110,367; 110,353; 110,373; 110,368
B12.
110,751; 110,832; 110,623; 110,352; 110,345; 110,221; 110,245; 110,358; 110,578; 110,234
B13.
220,732; 218,956; 219,342; 218,224; 221,325; 220,015; 219,961; 217,987; 219,548; 219,436
B14.
154,453; 155,768; 156,321; 154,978; 155,974; 154,346; 155,214; 154,986; 156,437; 157,456
B15.
176,567; 174,465; 175,987; 176,231; 174,982; 175,013; 176,325; 174,023; 177,237; 176,984
B16.
256,176; 253,872; 254,327; 254,794; 255,348; 256,673; 254,983; 255,781; 253,624; 257,028
B17.
378,217; 375,234; 376,562; 379,671; 375,312; 377,575; 374,276; 378,256; 379,213; 375,016
B18.
53,785; 54,458; 54,341; 53,368; 55,211; 54,763; 54,321; 55,374; 55,486; 53,897
B19.
76,876; 74,249; 75,348; 75,785; 76,325; 76,245; 76,581; 74,985; 74,652; 75,328
B20.
246,745; 245,786; 246,325; 245,284; 247,327; 246,521; 244,236; 244,753; 245,324; 246,763
B21.
110,347; 110,342; 110,357; 110,352; 110,345; 110,361; 110,367; 110,353; 110,373; 110,368
B22.
110,751; 110,832; 110,623; 110,352; 110,345; 110,221; 110,245; 110,358; 110,578; 110,234
B23.
220,732; 218,956; 219,342; 218,224; 221,325; 220,015; 219,961; 217,987; 219,548; 219,436
B24.
61 62 154,453; 155,768; 156,321; 154,978; 155,974; 154,346; 155,214; 154,986; 156,437; 157,456
B25.

176,567; 174,465; 175,987; 176,231; 174,982; 175,013; 176,325; 174,023; 177,237; 176,984

В26.

256,176; 253,872; 254,327; 254,794; 255,348; 256,673; 254,983; 255,781; 253,624; 257,028

В27.

378,217; 375,234; 376,562; 379,671; 375,312; 377,575; 374,276; 378,256; 379,213; 375,016

В28.

53,785; 54,458; 54,341; 53,368; 55,211; 54,763; 54,321; 55,374; 55,486; 53,897

В29.

76,876; 74,249; 75,348; 75,785; 76,325; 76,245; 76,581; 74,985; 74,652; 75,328

В30.

246,745; 245,786; 246,325; 245,284; 247,327; 246,521; 244,236; 244,753; 245,324; 246,763

3.2. Приклади виконання завдань.

Дано: результати десяти рівноточних вимірювань лінії. Виконати обробку ряду вимірів.

i	l,м.	ε_iмм	ν'_iмм	ε_i^2	$\nu_i'^2$
1	110,388	+3	+2	9	4
2	110,381	-4	-5	16	25
3	110,394	+9	+8	81	64
4	110,387	+2	+1	4	1
5	110,385	0	-1	0	1
6	110,379	-6	-7	36	79
7	110,393	+8	+7	64	49
8	110,386	+1	0	1	0
9	110,382	-3	-4	9	16
10	110,389	+4	+3	16	9
$\sum$		14	+4	236	218

1. Знайдемо середнє значення методом відліку від умовного початку, в якості якого оберемо =110,385. Знайдемо відхилення вимірів від умовного початку $\varepsilon_i = l_i - l^{'}$ i=1,2,…10, та результати внесемо в таблицю. Середнє значення вимірів буде визначатися за формулою

$$= l^{'} + \frac{[\varepsilon]}{n} = 110{,}385 + \frac{0{,}014}{10}\text{м} = 110{,}385 + 0{,}0014 = 110{,}3864\text{м}$$

2. Отримаємо заокруглене значення шуканої величини $L_{заокр}$=110,386, визначимо величину зсуву $\beta = L_{заокр} - L = -0{,}0004$.

3. Визначимо заокруглені імовірні поправки $v' = l - L_{заокр}$, використовуючи заокруглене значення, та внесемо в таблицю.

4. Виконаємо перевірку правильності обчислень $[v'] = -n\beta = -10(-0{,}0004м) = 4$ *мм*, отже перевірка виконується.

5. Для знаходження СКП знайдемо $[v^2]$ двома способами:

$$[v^2] = [\varepsilon^2] - \frac{[\varepsilon]^2}{n} = 236 - \frac{14^2}{10} = 216{,}4$$
$$[v^2] = [v'^2] - \frac{[v']^2}{n} = 218 - \frac{4^2}{10} = 216{,}4$$

6. Визначимо СКП одного вимірювання:

$$m = \sqrt{\frac{[v^2]}{n-1}} = \sqrt{\frac{216{,}4}{9}} = 4{,}9мм$$

7. Виконаємо оцінку надійності отриманого значення емпіричної СКП:

$$M = \frac{m}{\sqrt{n}} = \frac{4{,}9}{\sqrt{10}} = 1{,}55мм$$
$$m_M = \frac{M}{\sqrt{2n}} = \frac{1{,}55}{\sqrt{20}} = 0{,}35мм$$

8. Знайдемо СКП та виконаємо його оцінку для середнього значення:

$$m_m = \frac{m}{\sqrt{2(n-1)}} = \frac{4{,}9}{\sqrt{2(10-1)}} = \frac{4{,}9}{\sqrt{18}} = 1{,}16мм$$

4. Обробка ряду подвійних рівноточних вимірювань

Для контролю та підвищення точності кожну величину вимірюють кілька разів; часто обмежуються двома незалежними вимірами. У цьому випадку, обчисливши різниці для кожної пари вимірювань, отримують:

$$d_1 = x_1 - x'_1$$
$$d_2 = x_2 - x'_2$$

$$d_n = x_n - x'_n$$

Значення (d_i) є похибками різниць подвійних вимірювань. Тому, використовуючи формулу Гауса, маємо:

$$m = \sqrt{\frac{[\Delta^2]}{n}},$$
$$m = \sqrt{\frac{[d^2]}{n}}$$

де n - кількість усіх різниць.

Середня квадратична похибка одного вимірювання:

$$m_{x_i} = \frac{m_d}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{[d^2]}{2n}}$$

Нехай x_i та x'_i — дві незалежні рівноточні оцінки однієї величини;
$d_i = x_i - x'_i$; n — кількість пар.

Середнє по парі:

$$\bar{x}_i = \frac{x_i + x'_i}{2}.$$

СКП різниць:

$$m_d = \sqrt{\frac{\sum_{i-1}^{n} d_i^2}{n}}$$ — спрощена оцінка

$$m_d = \sqrt{\frac{\sum_{i-1}^{n} (d_i - \bar{d})^2}{n-1}}$$ — вибіркова незміщена оцінка

де $\bar{d} = \frac{1}{n} \sum d_i$.

Зв'язок СКП:

$$m_x = \frac{m_d}{\sqrt{2}}, \qquad m_{\bar{x}_i} = \frac{m_x}{\sqrt{2}} = \frac{m_d}{2}.$$

Підсумкова формула для похибки середнього по парі:

$$m_{\bar{x}_i} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\sum d_i^2}{n}} \text{ або } m_{\bar{x}_i} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\sum (d_i - \bar{d})^2}{n-1}}$$

Наведені вище формули застосовують у разі, коли ряд подвійних вимірювань не містить систематичних похибок. Якщо ж у результаті вимірювань наявні систематичні похибки, то значення різниць d_i значно спотворюються.

Величину залишкової систематичної похибки визначають як середнє арифметичне за формулою:

$$\theta = \frac{[d]}{n}$$

Критерієм допустимості є нерівність: $|[d]| \leq 0{,}25[|d|]$.

Розглянувши різницю $d_i^{'} = d_i - \theta$ як відхилення від арифметичної середини, за формулою Бесселя знаходимо

$$m_d = \sqrt{\frac{[d'^2]}{n-1}}$$

Контролем обчислень служить формула $[d'] = -n\beta$, де $\beta = \theta_{\text{окр}} - \theta$

Середні квадратні похибки m_{x_i}(одного вимірювання) і $m_{\bar{x}_i}$(арифметичної середини) визначається за формулами:

$$m_{x_i} = \frac{m_d}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{[d'^2]}{2(n-1)}}; \qquad m_{\bar{x}_i} = \frac{m_{x_i}}{\sqrt{2}} = 0{,}5\sqrt{\frac{[d^2]}{n-1}}$$

4.1. Завдання для самостійної роботи

У результаті вимірювання перевищень при двох горизонтах приладу на суміжних станціях за однакових відстаней від інструменту до рейок отримано результати вимірювань. Необхідно визначити точність цих вимірювань та оцінити їх надійність.

В1.

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
h1, м	-0,279	-0,092	-0,007	0,025	0,098	0,266	0,324	0,39	0,468	0,503
h2, м	-0,28	-0,089	-0,009	0,028	0,098	0,265	0,32	0,388	0,471	0,505

В2.

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
h1, м	-0,079	0,108	0,193	0,225	0,298	0,466	0,524	0,59	0,668	0,703
h2, м	-0,08	0,111	0,191	0,228	0,298	0,465	0,52	0,588	0,671	0,705

В3.

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
h1, м	0,121	0,308	0,393	0,425	0,498	0,666	0,724	0,79	0,868	0,903
h2, м	0,12	0,311	0,391	0,428	0,498	0,665	0,72	0,788	0,871	0,905

В4.

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
h1, м	0,321	0,508	0,593	0,625	0,698	0,866	0,924	0,99	1,068	1,103
h2, м	0,32	0,511	0,591	0,628	0,698	0,865	0,92	0,988	1,071	1,105

В5.

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
h1, м	0,521	0,708	0,793	0,825	0,898	1,066	1,124	1,19	1,268	1,303
h2, м	0,52	0,711	0,791	0,828	0,898	1,065	1,12	1,188	1,271	1,305

В6.

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
h1, м	0,721	0,908	0,993	1,025	1,098	1,266	1,324	1,39	1,468	1,503
h2, м	0,72	0,911	0,991	1,028	1,098	1,265	1,32	1,388	1,471	1,505

В7.

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
h1, м	0,921	1,108	1,193	1,225	1,298	1,466	1,524	1,59	1,668	1,703
h2, м	0,92	1,111	1,191	1,228	1,298	1,465	1,52	1,588	1,671	1,705

В8.

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
h1, м	1,121	1,308	1,393	1,425	1,498	1,666	1,724	1,79	1,868	1,903
h2, м	1,12	1,311	1,391	1,428	1,498	1,665	1,72	1,788	1,871	1,905

В9.

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
h1, м	1,321	1,508	1,593	1,625	1,698	1,866	1,924	1,99	2,068	2,103
h2, м	1,32	1,511	1,591	1,628	1,698	1,865	1,92	1,988	2,071	2,105

В10.

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
h1, м	1,521	1,708	1,793	1,825	1,898	2,066	2,124	2,19	2,268	2,303
h2, м	1,52	1,711	1,791	1,828	1,898	2,065	2,12	2,188	2,271	2,305

В11.

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
h1, м	-0,279	-0,092	-0,007	0,025	0,098	0,266	0,324	0,39	0,468	0,503
h2, м	-0,28	-0,089	-0,009	0,028	0,098	0,265	0,32	0,388	0,471	0,505

В12.

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
h1, м	-0,079	0,108	0,193	0,225	0,298	0,466	0,524	0,59	0,668	0,703
h2, м	-0,08	0,111	0,191	0,228	0,298	0,465	0,52	0,588	0,671	0,705

В13.

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
h1, м	0,121	0,308	0,393	0,425	0,498	0,666	0,724	0,79	0,868	0,903
h2, м	0,12	0,311	0,391	0,428	0,498	0,665	0,72	0,788	0,871	0,905

В14.

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
h1, м	0,321	0,508	0,593	0,625	0,698	0,866	0,924	0,99	1,068	1,103
h2, м	0,32	0,511	0,591	0,628	0,698	0,865	0,92	0,988	1,071	1,105

В15.

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
h1, м	0,521	0,708	0,793	0,825	0,898	1,066	1,124	1,19	1,268	1,303
h2, м	0,52	0,711	0,791	0,828	0,898	1,065	1,12	1,188	1,271	1,305

В16.

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
h1, м	0,721	0,908	0,993	1,025	1,098	1,266	1,324	1,39	1,468	1,503
h2, м	0,72	0,911	0,991	1,028	1,098	1,265	1,32	1,388	1,471	1,505

В17.

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
h1, м	0,921	1,108	1,193	1,225	1,298	1,466	1,524	1,59	1,668	1,703
h2, м	0,92	1,111	1,191	1,228	1,298	1,465	1,52	1,588	1,671	1,705

В18.

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
h1, м	1,121	1,308	1,393	1,425	1,498	1,666	1,724	1,79	1,868	1,903
h2, м	1,12	1,311	1,391	1,428	1,498	1,665	1,72	1,788	1,871	1,905

В19.

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
h1, м	1,321	1,508	1,593	1,625	1,698	1,866	1,924	1,99	2,068	2,103
h2, м	1,32	1,511	1,591	1,628	1,698	1,865	1,92	1,988	2,071	2,105

В20.

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
h1, м	1,521	1,708	1,793	1,825	1,898	2,066	2,124	2,19	2,268	2,303
h2, м	1,52	1,711	1,791	1,828	1,898	2,065	2,12	2,188	2,271	2,305

В21.

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
h1, м	-0,279	-0,092	-0,007	0,025	0,098	0,266	0,324	0,39	0,468	0,503
h2, м	-0,28	-0,089	-0,009	0,028	0,098	0,265	0,32	0,388	0,471	0,505

В22.

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
h1, м	-0,079	0,108	0,193	0,225	0,298	0,466	0,524	0,59	0,668	0,703
h2, м	-0,08	0,111	0,191	0,228	0,298	0,465	0,52	0,588	0,671	0,705

В23.

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
h1, м	0,121	0,308	0,393	0,425	0,498	0,666	0,724	0,79	0,868	0,903
h2, м	0,12	0,311	0,391	0,428	0,498	0,665	0,72	0,788	0,871	0,905

В24.

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
h1, м	0,321	0,508	0,593	0,625	0,698	0,866	0,924	0,99	1,068	1,103
h2, м	0,32	0,511	0,591	0,628	0,698	0,865	0,92	0,988	1,071	1,105

В25.

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
h1, м	0,521	0,708	0,793	0,825	0,898	1,066	1,124	1,19	1,268	1,303
h2, м	0,52	0,711	0,791	0,828	0,898	1,065	1,12	1,188	1,271	1,305

В26.

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
h1, м	0,721	0,908	0,993	1,025	1,098	1,266	1,324	1,39	1,468	1,503
h2, м	0,72	0,911	0,991	1,028	1,098	1,265	1,32	1,388	1,471	1,505

В27.

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
h1, м	0,921	1,108	1,193	1,225	1,298	1,466	1,524	1,59	1,668	1,703
h2, м	0,92	1,111	1,191	1,228	1,298	1,465	1,52	1,588	1,671	1,705

В28.

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
h1, м	1,121	1,308	1,393	1,425	1,498	1,666	1,724	1,79	1,868	1,903
h2, м	1,12	1,311	1,391	1,428	1,498	1,665	1,72	1,788	1,871	1,905

В29.

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
h1, м	1,321	1,508	1,593	1,625	1,698	1,866	1,924	1,99	2,068	2,103
h2, м	1,32	1,511	1,591	1,628	1,698	1,865	1,92	1,988	2,071	2,105

В30.

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
h1, м	1,521	1,708	1,793	1,825	1,898	2,066	2,124	2,19	2,268	2,303
h2, м	1,52	1,711	1,791	1,828	1,898	2,065	2,12	2,188	2,271	2,305

4.2 Приклад виконання завдання

У таблиці наведені перевищення між точками, визначені по чорній та червоній сторонах рейок. Обчислити Середню квадратичну похибку m_{xi}одного перевищення та $m_{\bar{x}i}$середнього перевищення по чорній і червоній сторонах рейок.

№ перевищення	перевищення		d , мм	d `= d-0, мм	d `²
	Чорна сторона	Червона сторона			
1	+1,384	+1,382	+2	+3	9
2	-0,817	-0,813	-4	-3	9
3	+0,373	+0,370	+3	+4	14
4	+0,448	+0,451	-3	-2	4
5	+1,755	+1,758	-3	-2	4
6	+0,211	+0,215	-4	-3	9
7	+0,314	+0,317	-3	-2	4
8	-0,227	-0,229	+2	+3	9
9	+0,972	+0,975	-3	-2	4
		$\sum$	-13	-4	68

Обчислення: $Q = \frac{|d|}{n} = -\frac{13}{9} = -1{,}44$ мм

Контроль: |d `|=-nβ=-9(-1+1,44)=-4 мм;

Список використаної літератури

1. Василенко В. М., Сафонова І. І., Яковлєв В. В**.** *Математична обробка результатів геодезичних вимірювань*. – Київ: Вища школа, 2003. – 276 с.
2. Герасименко Т. І., Воловик О. І. *Теорія похибок та обробка геодезичних вимірювань: навч. посіб.* – Львів: Видавництво Львівської політехніки, 2011. – 312 с.
3. Городиський Й. М. *Математичне опрацювання результатів вимірювань у геодезії та картографії*. – Львів: ЛНУ ім. І. Франка, 2009. – 248 с.
4. Ковальчук І. П., Костюк В. С. *Математична обробка геодезичних вимірювань: навч. посіб.* – Київ: НАУ, 2015. – 198 с.
5. Кузик В. І. *Теорія ймовірностей та математична статистика з основами геодезичних застосувань*. – Київ: КНУБА, 2014. – 280 с.
6. Мельничук П. С., Ляшенко А. В. *Програмування та алгоритмізація в геодезії*. – Київ: КНУБА, 2016. – 212 с.
7. Савчук С. А., Паламарчук В. М. *Основи обробки геодезичних вимірювань: навч. посіб.* – Вінниця: ВНТУ, 2010. – 196 с.
8. Третяк К. Р., Урусов С. О. *Обробка результатів геодезичних спостережень: навч. посіб.* – Львів: Видавництво Львівської політехніки, 2012. – 324 с.
9. Шульц Р. В., Мельничук А. А. *Вступ до програмування алгоритмів геодезичних розрахунків*. – Київ: КНУБА, 2017. – 168 с.
10. Яворська В. В. *Методи статистичної обробки результатів геодезичних вимірювань: навч.-метод. посіб.* – Чернівці: ЧНУ, 2018. – 144 с.